

---

**Thèse de Doctorat**  
**Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)**  
**Spécialité : Mécanique**

présentée par  
**Carole HENNINGER**

Sujet :

**Prise en compte des contraintes  
résiduelles dans un critère d'amorçage en  
rupture fragile**

Soutenance effectuée le 8 novembre 2007

devant le jury composé de Messieurs :

Jean-Baptiste LEBLOND	Professeur	Président
Djimédo KONDO	Professeur	Rapporteur
Frédéric LEBON	Professeur	Rapporteur
Alfred AKISANYA	Reader	Examineur
Dominique LEGUILLON	Directeur de Recherche	Directeur de thèse
Eric MARTIN	Professeur	Examineur
Jacques SCHLOSSER	Ingénieur CEA	Examineur

---

---

---

---

## Remerciements

J'adresse mes remerciements les plus sincères aux membres de mon jury de thèse. Je remercie MM. Djimédo KONDO et Frédéric LEBON d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Je remercie M. Jean-Baptiste LEBLOND pour ses enseignements et ses encouragements vespéraux. Je remercie M. Eric MARTIN pour les conseils, enseignements et encouragements qu'il me prodigue depuis six années. Je remercie M. Jacques SCHLOSSER pour ses conseils, son aide et ses encouragements tout au long de ces trois années. I would like to thank Mr. Alfred AKISANYA for crossing the Channel to attend my defence. Enfin, je remercie M. Dominique LEGUILLON pour la qualité de son encadrement et pour les nombreux conseils et enseignements qu'il m'a donnés.

Je suis reconnaissante à M. Gérard MAUGIN de m'avoir accueillie au (feu) Laboratoire de Modélisation en Mécanique et de m'avoir permis de réaliser mes travaux de thèse dans des conditions de travail efficaces. Je remercie MM. Pascal RAY et Elisée MACKAGNY pour leur aide informatique et surtout pour leur patience. Je remercie Mlle Catherine DROUET pour son aide logistique. Je remercie Mme Arlette FEUILLAT et M. Denis SEBART pour leur aide studieuse et précieuse. Je remercie Mme Anne-Marie AUBIN pour son aide efficace et sa patience. J'adresse mes remerciements à Mme Yezza DRINE pour la propreté des lieux. Je remercie tous les membres permanents de l'Institut qui par leur présence, leur écoute, leur aide, leurs conseils et leur gentillesse ont marqué mes années de doctorante. Enfin, je remercie tout particulièrement les membres non-permanents de l'Institut, pour leur présence amicale et leur patience lors des déjeuners.

Je n'oublie pas Eliane, Marc, Sylvie, Johnathan et Simon, je leur dois beaucoup...

Cette thèse a été réalisée entre octobre 2004 et septembre 2007 à :

Institut Jean le Rond d'Alembert  
UMR CNRS 7190/ Université Pierre et Marie Curie  
Boîtes 161-162  
4 place Jussieu  
75252 PARIS Cedex 05

---

---

## Résumé

Dans de nombreux assemblages de matériaux soumis à un chargement thermo-mécanique, des contraintes résiduelles thermiques apparaissent, qui modifient les conditions d'amorçage des fissures. Si de plus l'un des composants a un comportement plastique, des déformations résiduelles plastiques peuvent à leur tour jouer un rôle.

En mécanique de la rupture fragile, une des difficultés majeures concerne la prédiction de l'amorçage de fissures en l'absence de défaut initial. Leguillon a proposé un critère d'amorçage combinant une condition énergétique de type Griffith et une condition de contrainte maximum. La mise en oeuvre du critère fait intervenir les développements asymptotiques raccordés et la théorie des singularités. La bonne corrélation du modèle avec des mesures expérimentales pour les matériaux homogènes isotropes sous chargement mécanique pur a conduit à envisager l'extension du critère afin de prendre en compte des contraintes résiduelles.

La comparaison du critère modifié avec des mesures expérimentales sur un assemblage aluminium/époxyde sous chargement thermo-mécanique se révèle satisfaisante quant à la prédiction de la rupture de l'interface entre les composants. Elle permet également de mettre en évidence, par inversion, une méthode d'identification des paramètres de rupture de cette interface. Le critère modifié est appliqué également à l'analyse de la décohésion tuile/structure dans les aiguilles formant le limiteur du tokamak Tore Supra. En effet, des contraintes résiduelles d'origine thermique et plastique apparaissent dans la partie métallique des tuiles de protection.

## Mots-clés

rupture fragile ; amorçage ; fissure ; interface ; contraintes résiduelles ; contraintes thermiques ; plasticité.

---

---

# Abstract

Many material assemblies subjected to thermo-mechanical loadings develop thermal residual stresses which modify crack onset conditions. Besides if one of the components has a plastic behaviour, plastic residual deformations may also have a contribution.

One of the issues in brittle fracture mechanics is to predict crack onset without any pre-existing defect. Leguillon proposed an onset criterion based on both a Griffith-like energetic condition and a maximum stress criterion. The analysis uses matched asymptotics and the theory of singularity. The good fit between the model and experimental measurements led on homogeneous isotropic materials under pure mechanical loading incited us to take into account residual stresses in the criterion.

The comparison between the modified criterion and the experimental measurements carried out on an aluminum/epoxy assembly proves to be satisfying concerning the prediction of failure of the interface between the two components. Besides, it allows, through inversion, identifying the fracture properties of this interface. The modified criterion is also applied to the delamination of the tile/structure interface in the plasma facing components of the Tore Supra tokamak. Indeed thermal and plastic residual stresses appear in the metallic part of these coating tiles.

# Keywords

brittle fracture ; onset ; crack ; interface ; residual stress ; thermal stress ; plasticity.

---

---

---

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>I Le critère mixte - Cas d'une entaille en V</b>	<b>15</b>
1 Présentation	17
2 Les développements asymptotiques raccordés	19
2.1 Le problème réel . . . . .	19
2.2 Le problème extérieur . . . . .	21
2.3 Le problème intérieur . . . . .	26
3 Le critère mixte	31
3.1 La condition en énergie . . . . .	32
3.2 La condition en contrainte . . . . .	34
3.3 Le critère mixte . . . . .	35
4 Résultats	39
5 Comparaison avec un modèle de zone cohésive	43
5.1 Introduction . . . . .	43
5.2 The cohesive zone model . . . . .	44
5.3 The crack onset predictions . . . . .	47
5.4 Stability of the initiation process . . . . .	48
5.5 Conclusion . . . . .	50
<b>II Prise en compte des contraintes résiduelles</b>	<b>51</b>
1 Présentation	53

---

---

<b>2</b>	<b>Bimatériau sous chargement thermique</b>	<b>55</b>
2.1	Position du problème . . . . .	58
2.2	Comportement élastique du cuivre - Contraintes résiduelles d'origine thermique . . . . .	62
2.3	Comportement élasto-plastique du cuivre - Contraintes résiduelles d'origine thermique et plastique . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Bimatériau sous chargement thermo-mécanique</b>	<b>83</b>
3.1	Introduction . . . . .	83
3.2	The experiments by Qian and Akisanya . . . . .	84
3.3	The simplified thermo-elastic problem . . . . .	85
3.4	The displacement fields . . . . .	89
3.4.1	The mechanical contribution . . . . .	89
3.4.2	The thermal contribution . . . . .	92
3.5	The crack initiation analysis . . . . .	94
3.5.1	The stress condition . . . . .	94
3.5.2	The energy criterion . . . . .	95
3.5.3	The crack initiation criterion . . . . .	100
3.6	Comparison with experimental results . . . . .	101
3.7	Conclusion . . . . .	105
	<b>Conclusion</b>	<b>109</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>113</b>
	<b>Annexes</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>Données matériaux</b>	<b>121</b>
<b>B</b>	<b>Calcul de la variation d'énergie potentielle</b>	<b>123</b>
B.1	Calcul en déplacement imposé . . . . .	123
B.2	Calcul en effort imposé . . . . .	127
B.3	Expression déduite des développements asymptotiques raccordés . . .	128

---



---

# Introduction

---



Ce travail s'inscrit dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile en 2D sous l'hypothèse de déformations planes. Il consiste à prédire l'amorçage d'une fissure dans des structures subissant des chargements thermo-mécaniques. Il se base sur le critère de rupture mis au point par Leguillon [L02] pour les matériaux fragiles, mais on verra qu'il est possible, sous certaines hypothèses, de prendre en compte des déformations résiduelles d'origine plastique.

Dans cette étude, aucune hypothèse n'est faite sur la présence éventuelle de défauts (fissures, cavités, ...) dans les structures. On ne s'intéressera donc pas à des méthodes probabilistes de type Weibull [W51, TP99]. L'amorçage est supposé s'initier à des points de singularité géométrique connus (entaille en V ou intersection d'un bord libre avec une interface entre deux matériaux, par exemple), qui concentrent les contraintes [G20, W52].

Dans de nombreuses situations, l'amorçage est soudain : la fissure passe brutalement d'une longueur nulle à une longueur finie  $\ell_0$ . Toutefois, en se limitant à la phase d'amorçage, on verra que les effets d'inertie peuvent être négligés et qu'une approche statique incrémentale est possible.

Le critère d'amorçage de Leguillon fait intervenir un facteur d'intensité des contraintes généralisé (FICG)  $K$ , analogue des facteurs d'intensité des contraintes  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  d'Irwin pour la fissure en milieu homogène. Le FICG est en général calculé numériquement à l'aide d'intégrales, indépendantes du contour si le comportement est purement élastique [R68, P74, RK77, HK07]. L'amorçage a lieu lorsque  $K$  atteint une valeur critique, dénotée  $K_c$ . Très souvent, la valeur critique  $K_c$  ne peut malheureusement être déterminée que par l'expérience [QA98a, RG96, DS97]. Comme cette valeur est fortement corrélée avec la géométrie de l'éprouvette, ses dimensions, le type de chargement, les propriétés du ou des matériau(x), ..., il n'est pas possible de donner au critère un caractère prédictif.

Dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile, Leguillon [L02], s'inspirant de travaux expérimentaux portant sur des composites multicouches [PG78], propose un critère mixte stipulant que l'amorçage a lieu si la contrainte de traction et le taux de restitution de l'énergie atteignent simultanément des niveaux critiques.

L'utilisation d'une condition double est justifiée par certains problèmes que pose l'utilisation exclusive de l'un ou l'autre critère. En effet, la condition en contrainte fait intervenir la résistance en traction du matériau  $\sigma_c$ . Or la théorie de l'élasticité prédit une contrainte infinie au voisinage des points singuliers. Une condition de contrainte maximum prédirait donc la rupture au point singulier, quel que soit le chargement. Pour contourner ce problème, l'idée est de faire porter le critère de contrainte maximum à une certaine distance du point singulier [MC58, N69, S94,

LY03b]. La détermination de cette distance peut être arbitraire ou résulter d'un second critère de rupture. De plus,  $\sigma_c$  est définie comme la traction maximum que peut supporter le matériau, et à cet égard est sujette à discussions. En effet, cette grandeur est difficile à estimer dans la mesure où elle peut dépendre des dimensions de l'éprouvette sur laquelle elle est mesurée [W51, C89].

Une autre manière de contourner le problème des contraintes infinies est de compléter l'analyse par un critère énergétique [G20] : lorsque les contraintes sont trop importantes, la structure relaxe celles-ci par la création d'une fissure. Le bilan énergétique fait intervenir l'énergie de rupture  $\mathcal{G}_c S$  [G20] nécessaire à créer la fissure de surface  $S$ . Le chargement critique déduit de ce critère n'est pas accessible si l'on ne connaît pas la surface d'amorçage *a priori*. En pratique, l'analyse par éléments finis permet de contourner cet obstacle par la simulation de plusieurs géométries d'amorçage. D'autres méthodes énergétiques portent sur la minimisation d'une certaine énergie totale du système [FM98]. Cependant, la condition en énergie seule peut conduire également à un paradoxe : dans certains cas [L02], le critère de Griffith prédit l'absence d'amorçage, quel que soit le chargement appliqué.

Le critère mixte de Leguillon [L02] fait donc intervenir deux paramètres de rupture,  $\sigma_c$  et  $\mathcal{G}_c$ . Il rejoint en cela certains modèles de zone cohésive (CZM) [B59, D60, N90], qui permettent de s'affranchir de la notion peu physique de « contrainte infinie » qu'introduit la théorie de l'élasticité. L'utilisation de zones cohésives ([SJ06, dB03, AC01, AL92, CL02]) connaît un fort succès, malgré la non-linéarité du problème (la longueur de la zone cohésive est une inconnue).

La mise au point du critère mixte passe par l'utilisation des développements asymptotiques raccordés [LSH99], qui permet de s'affranchir de l'inconnue  $\ell$ , et des champs élastiques singuliers valables au voisinage des points critiques [W52].

A cet égard, le critère mixte est valable pour tout type de points singuliers, en particulier ceux localisés sur des interfaces entre deux matériaux. Dans cette configuration, la mise au point du critère mixte pour un chargement mécanique ne pose pas de difficulté supplémentaire. Toutefois, ce type de structures peut être le lieu de contraintes résiduelles lorsqu'il est soumis à des chargements thermiques, et leur influence sur l'amorçage doit être prise en compte (cf. partie II). En particulier, l'intégrale  $\mathcal{H}$  utilisée pour le calcul du FICG  $K$  n'est plus indépendante du contour en présence de contraintes résiduelles. On verra dans la partie II que cette difficulté peut être surmontée en prenant en compte un terme supplémentaire dans les champs singuliers. Les paramètres de rupture qui interviennent dans le critère mixte sont logiquement ceux de l'interface, mais très souvent, ils sont difficiles à identifier à cause des problèmes techniques liés aux expériences [WW06]. De plus, ces propriétés

dépendent fortement des conditions d'élaboration des bimatériaux (température, traitement chimique,...) [LC06].

La partie I s'attache à expliquer le critère mixte d'amorçage dans le cas simple d'un matériau homogène isotrope entaillé en V. La méthode asymptotique utilisant les champs singuliers est expliquée et on détaille le calcul des différentes grandeurs intervenant dans le critère. On y établit également une comparaison entre le critère mixte et le modèle de zone cohésive de Dugdale. Le point singulier est dans ce cas précédé d'une zone d'endommagement où s'exercent des forces de cohésion traduisant une certaine résistance du matériau à la rupture.

La partie II est consacrée à l'analyse de la rupture à l'interface séparant deux matériaux dans des structures composites, avec la prise en compte de contraintes résiduelles. Dans les exemples qui sont développés, ces contraintes résiduelles apparaissent à la suite du refroidissement des structures. Les contraintes résiduelles sont donc d'origine thermique, mais on verra que l'on peut également traiter les contraintes qui apparaissent à cause de la plasticité d'un des composants. Les contraintes résiduelles sont prises en compte dans les champs asymptotiques sous la forme de modes supplémentaires, ce qui modifie l'écriture de  $K$  et de  $K_c$ . Le calcul de  $K$  se trouve compliqué par le fait que les intégrales habituellement utilisées ne sont plus indépendantes du contour.

L'approche est à la fois analytique et numérique. Le calcul des différentes grandeurs intervenant dans le critère est réalisé en utilisant le code de calcul MODULEF. La partie concernant les déformations plastiques utilise des résultats établis avec le code de calcul Cast3M.

---



---

## Première partie

### Le critère mixte - Cas d'une entaille en V





# Chapitre 1

## Présentation

Cette partie est consacrée à la mise en place du critère « mixte » d’amorçage à travers l’exemple particulier d’une éprouvette entaillée en V soumise à un chargement uniaxial (cf. Fig. 2.1 (a)).

L’étude est menée pour des angles d’ouverture  $\omega$  compris entre  $0^\circ$  (cas limite de la fissure) et  $180^\circ$  (cas limite du bord droit). On cherche à déterminer le chargement critique d’amorçage d’une fissure en pointe d’entaille. En effet, à part dans le cas du bord droit, la pointe d’entaille est un point singulier, au sens où les contraintes tendent vers l’infini, et constitue donc un lieu privilégié pour l’amorçage de fissures.

Le critère mixte proposé par Leguillon [L02] est basé sur deux conditions supposées nécessaires, chacune d’entre elles prise séparément n’étant pas suffisante : l’une porte sur la traction maximum que peut supporter un matériau et l’autre sur l’énergie nécessaire pour provoquer une séparation (cf. chapitre 3). La conservation de l’énergie mène à la conclusion que, dans la plupart des cas, l’amorçage est brutal : on passe soudainement d’un état non fissuré de la structure à une structure comportant une fissure de longueur  $\ell_0$  finie.

Cette longueur est indéterminée *a priori*, mais en supposant qu’elle est petite devant les dimensions de la structure, on peut mener un développement asymptotique à deux échelles. Dans le domaine dit « extérieur », la fissure n’est pas visible, tandis que dans le domaine dit « intérieur », la fissure est de longueur unitaire. Le raccordement des champs établis dans les deux domaines permet de déterminer la solution du problème posé sur le domaine fissuré (cf. chapitre 2).

Ces deux conditions permettent de connaître la (ou les) longueur(s) d’amorçage possible(s) (donc de valider ou non l’hypothèse de petitesse *a posteriori*) et le chargement critique qui déclenche celui-ci. Les résultats théoriques sont comparés aux mesures expérimentales (cf. chapitre 4).

Le chapitre 5 établit une comparaison entre le critère mixte d’amorçage et un

---

autre modèle à deux paramètres, le modèle de zone cohésive de Dugdale [D60]. Originellement destiné à modéliser la rupture de matériaux à partir d'une loi élastique parfaitement plastique, ce modèle peut être adapté aux matériaux fragiles en donnant à la contrainte de cohésion la valeur, non plus de la limite élastique, mais de la résistance en traction  $\sigma_c$ . L'avantage de ce modèle réside dans son absence de loi reliant la contrainte de cohésion à l'ouverture de la zone endommagée : une contrainte de cohésion constante agit sur les lèvres de la (future) fissure tant que l'ouverture n'a pas atteint une valeur critique, et s'annule lorsque l'ouverture critique est atteinte.

---

## Chapitre 2

# Les développements asymptotiques raccordés

### 2.1 Le problème réel

On considère une structure entaillée en  $V$  avec un angle d'ouverture  $\omega$  et soumise à un chargement uniaxial symétrique en déplacement imposé (cf. Fig. 2.1 (a)). Dans le but de comparer les résultats théoriques avec des mesures expérimentales, on étudie les cas où l'angle  $\omega$  prend les valeurs  $0^\circ$  (fissure),  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $160^\circ$  et  $180^\circ$  (bord droit).

L'analyse est valable pour tout type de matériau élastique fragile [LY03a, LY03b], mais les résultats présentés ici utilisent les caractéristiques du plexiglas (PMMA) : module de Young  $E = 3250$  MPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , résistance en traction  $\sigma_c = 75$  MPa et ténacité  $\mathcal{G}_c = 350$  J.m<sup>-2</sup> (cf. Annexe A). Les dimensions du spécimen sont  $L = 148$  mm et  $h = 90$  mm dans le plan (cf. Fig. 2.1 (a)) et  $b = 10$  mm dans la direction normale.

Pour simplifier le propos, on choisit de décrire la fissuration résultant d'un chargement symétrique, mais il est également possible de faire l'analyse pour un chargement non symétrique (cf. chapitre 4).

Toujours pour des raisons de simplicité, on néglige ici le rayon de courbure de l'entaille, qui n'est pas nul en pratique, mais dont la prise en compte nécessite un développement plus complexe [P98, LY03a].

Le choix d'un chargement en déplacement imposé est dicté par les essais expérimentaux. Cependant, l'étude que nous allons mener est tout à fait valable pour un chargement en effort imposé.

Le champ de déplacements  $\underline{U}^{(0)}$  sur la structure saine  $\Omega_0$  vérifie les équations

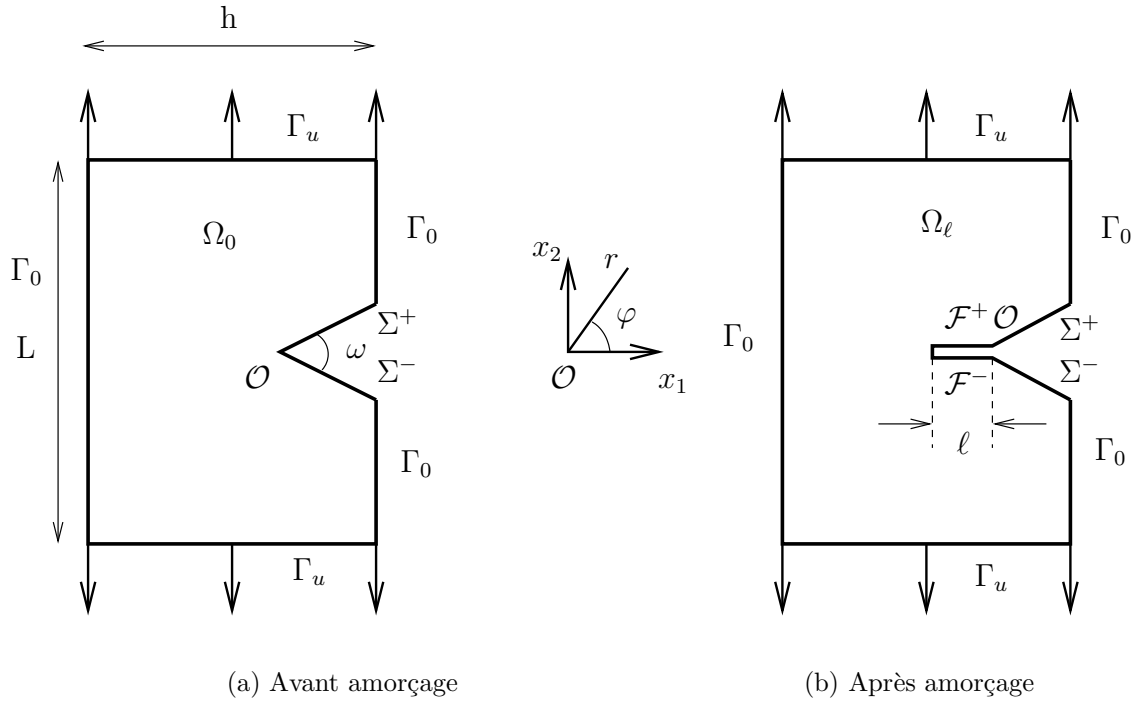


FIG. 2.1 – Le domaine réel.

suivantes (cf. Fig. 2.1 (a)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^{(0)}) = C : \nabla_s \underline{U}^{(0)} \text{ dans } \Omega_0 \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^{(0)}) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_0 \\ \underline{U}^{(0)} = \underline{U}^d \text{ sur } \Gamma_u \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^{(0)}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Sigma^+ \cup \Sigma^- \end{array} \right. \quad (2.1)$$

L'équation (2.1<sub>1</sub>) est la loi de comportement élastique du matériau homogène sous l'hypothèse des petites déformations;  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy,  $C$  est le tenseur d'élasticité et  $\nabla_s$  dénote la partie symétrique de l'opérateur gradient.

L'équation (2.1<sub>2</sub>) formule l'équilibre statique de la structure en l'absence de forces volumiques.

L'équation (2.1<sub>3</sub>) donne le chargement de la structure (déplacement imposé sur  $\Gamma_u$ ).

L'équation (2.1<sub>4</sub>) exprime les conditions de bord libre sur toutes les autres faces de  $\Omega_0$ , en particulier sur les bords de l'entaille ( $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$ ).

Après amorçage, on se trouve dans la configuration de la figure 2.1 (b). La

symétrie de la structure et du chargement implique une direction de propagation perpendiculaire à la direction de sollicitation. La structure fissurée contiendra donc une fissure de longueur  $\ell$  en pointe d'entaille, le long de la bissectrice de l'angle  $\omega$ .

La longueur  $\ell$  est inconnue *a priori*, mais si on la suppose petite, le champ de déplacements  $\underline{U}^\ell$  sur la structure perturbée peut s'écrire

$$\underline{U}^\ell(x_1, x_2) = \underline{U}^{(0)}(x_1, x_2) + f(\ell)\underline{U}^{(1)}(x_1, x_2) + \dots \quad (2.2)$$

avec

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} f(\ell) = 0 \quad (2.3)$$

L'expression (2.2) est valable « loin » de la zone fissurée. Le terme  $\underline{U}^{(0)}$  est le champ de déplacements sur la structure non perturbée, et on lui adjoint des termes correctifs supposés petits si  $\ell$  est petite (eqn. (2.3)).

Le champ perturbé  $\underline{U}^\ell$  vérifie les équations suivantes sur  $\Omega_\ell$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^\ell) = C : \nabla_s \underline{U}^\ell \text{ dans } \Omega_\ell \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^\ell) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_\ell \\ \underline{U}^\ell = \underline{U}^d \text{ sur } \Gamma_u \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^\ell) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Sigma^+ \cup \Sigma^- \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^\ell) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^- \end{array} \right. \quad (2.4)$$

L'équation (2.4<sub>5</sub>) indique que les bords  $\mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^-$  de la fissure sont libres de contraintes.

L'influence de la fissure de longueur  $\ell$  est estimée en étudiant les champs élastiques successivement au voisinage de la fissure lorsque sa longueur tend vers 0, et sur un domaine « dilaté » dans lequel la fissure est de longueur unitaire. L'analyse repose essentiellement sur l'hypothèse selon laquelle  $\ell$  est petite devant les dimensions de l'éprouvette, hypothèse validée (ou non) à l'issue de la démarche.

## 2.2 Le problème extérieur

Lorsque  $\ell$  tend vers 0, la fissure n'est pas visible, le domaine est donc identique au domaine réel avant amorçage (cf. Fig. 2.1 (a)). Le champ de déplacements est donc  $\underline{U}^{(0)}$ , vérifiant les équations du système (2.1).

Le champ  $\underline{U}^{(0)}$  est cherché sous la forme d'un développement de Williams [W52], i.e. d'un développement en puissances de  $r$ , au voisinage de la pointe d'entaille  $\mathcal{O}$  :

$$\underline{U}^{(0)}(x_1, x_2) = \underline{U}^{(0)}(\mathcal{O}) + Kr^\lambda \underline{u}(\varphi) + \dots \quad (2.5)$$

Le terme constant  $\underline{U}^{(0)}(\mathcal{O})$  correspond à la translation de corps rigide de l'origine  $\mathcal{O}$ , elle n'intervient pas dans le raisonnement qui suit mais rend l'équation (2.5) cohérente lorsque  $r \rightarrow 0$ . Les coordonnées  $(x_1, x_2)$  et  $(r, \varphi)$  sont respectivement les coordonnées cartésiennes et polaires d'origine  $\mathcal{O}$  (cf. Fig. 2.1).

Les termes supplémentaires du développement (2.5) sont évoqués par les points de suspension. Ils prennent en compte des modes de moins en moins singuliers.

*Le terme singulier  $r^\lambda \underline{u}(\varphi)$*

Le champ  $r^\lambda \underline{u}(\varphi)$  vérifie les équations suivantes dans un secteur  $\mathcal{V}(\mathcal{O})$  d'angle  $\gamma$ , avec  $\gamma = 2\pi - \omega$  (cf. Fig. 2.2) :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(r^\lambda \underline{u}(\varphi)) = C: \nabla_s(r^\lambda \underline{u}(\varphi)) = r^{\lambda-1} \underline{\underline{s}}(\varphi) \text{ dans } \mathcal{V}(\mathcal{O}) \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(r^\lambda \underline{u}(\varphi)) = \underline{0} \text{ dans } \mathcal{V}(\mathcal{O}) \\ \underline{\underline{\sigma}}(r^\lambda \underline{u}(\varphi)) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } (\Sigma^+ \cup \Sigma^-) \cap \partial \mathcal{V}(\mathcal{O}) \end{cases} \quad (2.6)$$

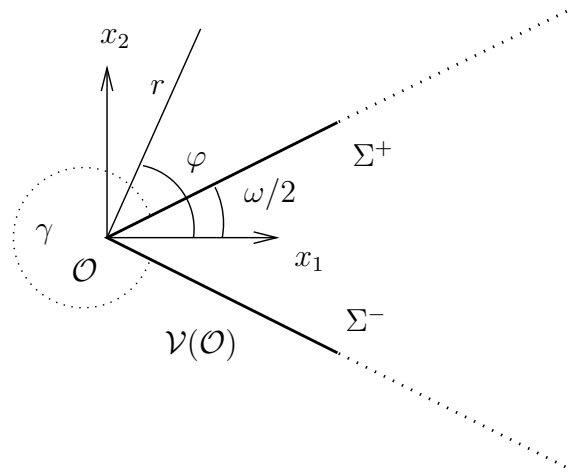


FIG. 2.2 – Le voisinage du point singulier  $\mathcal{O}$ .

Le système (2.6) admet deux solutions [W52, DS97, LM00a] : l'une correspond au mode symétrique, notée  $r^\lambda \underline{u}(\varphi)$ , l'autre au mode antisymétrique, notée  $r^\mu \underline{v}(\varphi)$ . On donne dans le tableau 2.1 la valeur de  $\lambda$  et  $\mu$  en fonction de l'ouverture d'entaille  $\omega$ .

$\omega (^\circ)$	0	30	60	90	120	160	180
$\lambda$	0.5	0.502	0.512	0.545	0.616	0.819	1
$\mu$	0.5	0.598	0.730	0.906	1.150	1.628	1.995

TAB. 2.1 – Les premiers exposants  $\lambda$  et  $\mu$  des termes du développement de Williams.

On voit dans le tableau 2.1 que l'exposant  $\lambda$  (correspondant au mode symétrique) est toujours strictement inférieur à 1, sauf pour le bord droit ( $\omega = 180^\circ$ ). Les contraintes, proportionnelles à  $r^{\lambda-1}$ , sont donc toujours singulières pour le mode symétrique (sauf pour le bord droit), au sens où elles tendent vers l'infini lorsque  $r$  tend vers 0. En outre, plus l'angle d'entaille est important, moins la singularité est forte. On retrouve les valeurs bien connues de la fissure pour  $\omega = 0^\circ$  (contrainte en  $1/\sqrt{r}$ ) et du bord droit pour  $\omega = 180^\circ$  (pas de singularité).

On voit aussi que l'exposant  $\mu$  (correspondant au mode antisymétrique) est toujours supérieur à celui du mode symétrique (dans le cas de la fissure, ils sont égaux). Les contraintes associées au mode antisymétrique, proportionnelles à  $r^{\mu-1}$ , sont donc moins singulières que celles associées au mode symétrique, voire même non singulières pour  $\omega = 120^\circ$ ,  $\omega = 160^\circ$  et  $\omega = 180^\circ$  (cf. Tab. 2.1).

De plus, le mode antisymétrique n'est pas activé par un chargement symétrique, au sens où le facteur d'intensité du mode antisymétrique s'annule. Cet argument nous a permis de conserver uniquement le mode symétrique dans le développement asymptotique de  $\underline{U}^{(0)}$  (cf. eqn. (2.5)).

L'exposant  $\lambda$  et le vecteur  $\underline{u}(\varphi)$  dépendent uniquement de la géométrie locale, ici de l'angle  $\omega$  [W52, DS97]. Le mode  $r^\lambda \underline{u}(\varphi)$  étant symétrique, il est possible de le normaliser de manière à ce que la contrainte de traction agissant en amont du point singulier sur la bissectrice de l'angle  $\omega$  soit égale à 1 (cf. Fig. 2.2) :

$$s_{\varphi\varphi}(\varphi = \pi) = 1 \quad (2.7)$$

*Remarque :* Cette normalisation a pour but de simplifier l'écriture du critère en contrainte (cf. section 3.2). La notation  $s_{\varphi\varphi}$  fait référence à la composante orthoradiale du champ  $\underline{s}$  défini en (2.6<sub>1</sub>).

Bien qu'ils soient connus analytiquement, l'exposant  $\lambda$  et le vecteur  $\underline{u}(\varphi)$  sont ici calculés à l'aide d'une procédure automatique mise au point à partir de la méthode du déterminant détaillée dans [LSP87] (Chapitre V p. 62; Chapitre VI p. 92).

Cette procédure générale devient incontournable dans les situations géométriques complexes (bimatériaux par exemple).

### Le FICG $K$

Le scalaire  $K$  du développement (2.5) est le facteur d'intensité des contraintes généralisé (FICG), il dépend de la géométrie globale et du chargement. Il est calculé à l'aide de l'intégrale de contour notée  $\mathcal{H}$  ici [LSP87, LD99] et définie par :

$$\mathcal{H}_\Gamma(\underline{A}, \underline{B}) = \frac{1}{2} \int_\Gamma \left( \underline{\sigma}(\underline{A}) \cdot \underline{n}_\Gamma \cdot \underline{B} - \underline{\sigma}(\underline{B}) \cdot \underline{n}_\Gamma \cdot \underline{A} \right) ds \quad (2.8)$$

où  $\Gamma$  est un contour quelconque dans le voisinage de la singularité, dont les deux extrémités sont situées sur le bord libre et  $\underline{n}_\Gamma$  est la normale extérieure à  $\Gamma$  (cf. Fig. 2.3),  $ds$  est la variation élémentaire de longueur, et  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  sont des champs de déplacements quelconques.

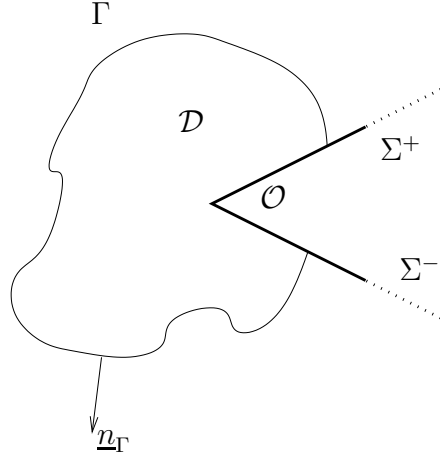


FIG. 2.3 – Un contour  $\Gamma$  pour le calcul de  $K$ .

Cette intégrale est indépendante du contour  $\Gamma$  si  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  sont en équilibre et si ces champs vérifient des conditions homogènes à 0 sur les bords où sont situées les extrémités de  $\Gamma$ .

Le calcul de  $K$  fait intervenir le mode singulier (primal)  $r^\lambda \underline{u}(\varphi)$  et le mode dual  $r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)$ .

En effet, il est prouvé ([LSP87], chapitre VI, Prop. 2.5) que si  $r^\lambda \underline{u}(\varphi)$  est solution de (2.6), alors  $r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)$  l'est aussi.

Calculons la grandeur  $\mathcal{H}_\Gamma(\underline{U}^{(0)}, r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi))$  sur un contour  $\Gamma$ .



$$\begin{aligned}
& \mathcal{H}_\Gamma(\underline{U}^{(0)}, r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)) \\
&= \int_\Gamma \left( \underline{\sigma}(\underline{U}^{(0)}) \cdot \underline{n} \cdot r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi) - \underline{\sigma}(r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)) \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^{(0)} \right) ds \\
&= \int_\Gamma \left( K \underline{\sigma}(r^\lambda \underline{u}(\varphi)) \cdot \underline{n} \cdot r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi) - \underline{\sigma}(r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)) \cdot \underline{n} \cdot K r^\lambda \underline{u}(\varphi) \right) ds \\
&\quad - \int_\Gamma \underline{\sigma}(r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)) \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^{(0)}(\mathcal{O}) \, ds \text{ d'après l'expression (2.5) de } \underline{U}^{(0)} \\
&= K \mathcal{H}_\Gamma(r^\lambda \underline{u}(\varphi), r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)) - \int_\Gamma \underline{\sigma}(r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)) \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^{(0)}(\mathcal{O}) \, ds
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Calculons le terme  $\int_\Gamma \underline{\sigma}(r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)) \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^{(0)}(\mathcal{O}) \, ds$ .

$$\begin{aligned}
& \int_\Gamma \underline{\sigma}(r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)) \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^{(0)}(\mathcal{O}) \, ds \\
&= \underline{U}^{(0)}(\mathcal{O}) \cdot \int_\Gamma \underline{\sigma}(r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)) \cdot \underline{n} \, ds \\
&= \underline{U}^{(0)}(\mathcal{O}) \cdot \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\sigma}(r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)) \cdot \underline{n} \, ds \\
&\quad - \underline{U}^{(0)}(\mathcal{O}) \cdot \int_{\Sigma^+ \cup \Sigma^-} \underline{\sigma}(r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)) \cdot \underline{n} \, ds
\end{aligned} \tag{2.10}$$

avec  $\mathcal{D}$  délimité par  $\Gamma$  (cf. Fig. 2.3)

$$\begin{aligned}
&= \underline{U}^{(0)}(\mathcal{O}) \cdot \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\sigma}(r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)) \cdot \underline{n} \, ds \\
&\quad \text{car } r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi) \text{ vérifie des conditions de bords libres sur } \Sigma^+ \cup \Sigma^- \\
&= \underline{U}^{(0)}(\mathcal{O}) \cdot \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \underline{\sigma}(r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)) \, dx \text{ d'après le théorème de Green}
\end{aligned}$$

L'intégrand ci-dessus est nul car le champ  $r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)$  est en équilibre dans  $\mathcal{D}$ .  
Donc finalement, le FICG  $K$  s'exprime :

$$K = \frac{\mathcal{H}_\Gamma(\underline{U}^{(0)}, r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi))}{\mathcal{H}_\Gamma(r^\lambda \underline{u}(\varphi), r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi))} \tag{2.11}$$

La solution  $\underline{U}^{(0)}$  est calculée par éléments finis en résolvant le système (2.1). Les modes  $r^\lambda \underline{u}(\varphi)$  et  $r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)$  sont calculés numériquement à l'aide de la procédure détaillée dans [LSP87] (Chapitre V p. 62 ; Chapitre VI p. 92).

Il est à noter que, en conséquence de la normalisation sur le champ de contraintes singulier primal (cf. eqn. (2.7)), ce dernier est sans dimension tandis que le champ de déplacements  $\underline{u}$  s'exprime en  $\text{MPa}^{-1}$ . Le facteur  $K$  a donc pour unité le  $\text{MPa} \cdot \text{mm}^{1-\lambda}$ .

## 2.3 Le problème intérieur

L'analyse est ensuite effectuée sur le domaine dit « intérieur », obtenu par dilatation du domaine réel par  $1/\ell$ . Ce domaine est non-borné lorsque  $\ell$  tend vers 0, et la fissure  $y$  est de longueur unitaire (cf. Fig. 2.4). Les coordonnées cartésiennes et polaires sont notées respectivement  $(y_1, y_2)$  et  $(\rho, \varphi)$ , avec  $y_i = \frac{x_i}{\ell}$  et  $\rho = \frac{r}{\ell}$ .

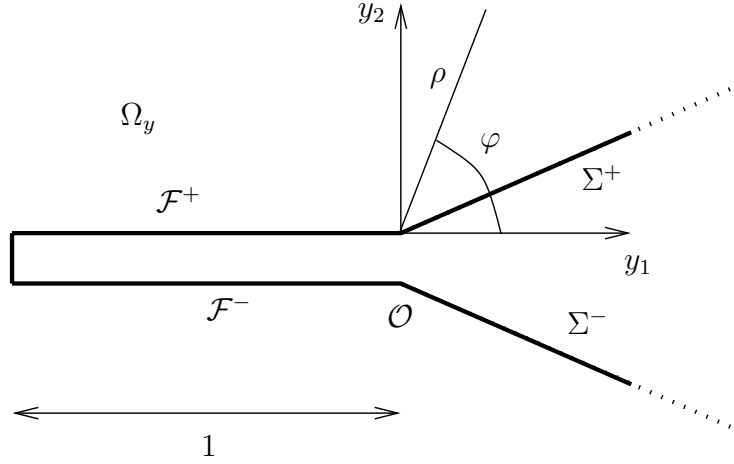


FIG. 2.4 – Le domaine intérieur.

La solution  $\underline{U}^\ell$  du problème perturbé vérifie les équations suivantes sur  $\Omega_y$  (cf. Fig. 2.4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^\ell) = C : \nabla_s \underline{U}^\ell \text{ dans } \Omega_y \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^\ell) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_y \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^\ell) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Sigma^+ \cup \Sigma^- \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^\ell) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^- \\ \underline{U}^\ell \sim \underline{U}^{(0)} \text{ quand } \rho \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (2.12)$$

L'équation (2.12<sub>5</sub>) est la condition de raccordement entre le problème intérieur et le problème extérieur : dans une zone intermédiaire, qui correspond à  $\rho \rightarrow \infty$  dans le domaine intérieur et à  $r \rightarrow 0$  dans le domaine extérieur, le champ  $\underline{U}^\ell$  « se comporte » comme  $\underline{U}^{(0)}$  (notation  $\sim$ ).

On suppose que l'on peut exprimer  $\underline{U}^\ell$  sous forme d'un développement par rapport au paramètre  $\ell$  :

$$\underline{U}^\ell(x_1, x_2) = \underline{U}^\ell(\ell y_1, \ell y_2) = F_0(\ell) \underline{V}^{(0)}(y_1, y_2) + F_1(\ell) \underline{V}^{(1)}(y_1, y_2) + \dots \quad (2.13)$$

avec

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{F_1(\ell)}{F_0(\ell)} = 0 \quad (2.14)$$

La substitution de  $\underline{U}^\ell$  par son expression (2.13) dans le système (2.12) permet, en utilisant la linéarité des opérateurs de dérivation et la condition (2.14), d'obtenir deux systèmes découplés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}(\underline{V}^{(0)}) = C : \nabla_s^y \underline{V}^{(0)} \text{ dans } \Omega_y \\ \nabla^y \cdot \underline{\sigma}(\underline{V}^{(0)}) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_y \\ \underline{\sigma}(\underline{V}^{(0)}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Sigma^+ \cup \Sigma^- \\ \underline{\sigma}(\underline{V}^{(0)}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^- \\ F_0(\ell) \underline{V}^{(0)} \sim \underline{U}^{(0)}(\mathcal{O}) \text{ quand } \rho \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (2.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{V}^{(1)}) = C : \nabla_s^y \underline{V}^{(1)} \text{ dans } \Omega_y \\ \nabla^y \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{V}^{(1)}) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_y \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{V}^{(1)}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Sigma^+ \cup \Sigma^- \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{V}^{(1)}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^- \\ F_1(\ell) \underline{V}^{(1)}(y_1, y_2) \sim K \ell^\lambda \rho^\lambda \underline{u}(\varphi) \text{ quand } \rho \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Les lois de comportement (2.15<sub>1</sub>) et (2.16<sub>1</sub>) et les équations d'équilibre (2.15<sub>2</sub>) et (2.16<sub>2</sub>) font intervenir des opérateurs de dérivation  $\nabla^y$  par rapport aux variables « dilatées »  $y_i$ , avec la règle de dérivation

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{\ell} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (2.17)$$

Les équations (2.15<sub>5</sub>) et (2.16<sub>5</sub>) permettent de déterminer les fonctions  $F_i$  :

$$F_0(\ell) = 1 \quad F_1(\ell) = K \ell^\lambda \quad (2.18)$$

Il est clair que le problème (2.15) admet pour solution  $\underline{U}^{(0)}(\mathcal{O})$ , i.e. une constante dans tout le domaine.

Le problème (2.16) est mal posé au sens de Lax-Milgram, dans la mesure où l'on ne peut pas appliquer ce théorème, habituellement invoqué pour prouver l'existence et l'unicité de solutions à des problèmes elliptiques. La condition (2.16<sub>5</sub>) conduit à une énergie non bornée. On va donc utiliser un principe de superposition et poser :

$$\underline{V}^{(1)}(y_1, y_2) = \rho^\lambda \underline{u}(\varphi) + \hat{\underline{V}}(y_1, y_2) \quad (2.19)$$

En reportant l'expression (2.19) dans le système (2.16), on obtient les équations vérifiées par la nouvelle inconnue  $\underline{\hat{V}}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\hat{V}}) = C : \nabla_s^y \underline{\hat{V}} \text{ dans } \Omega_y \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\hat{V}}) = -\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\rho^\lambda \underline{u}(\varphi)) \text{ dans } \Omega_y \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\hat{V}}) \cdot \underline{n} = -\underline{\underline{\sigma}}(\rho^\lambda \underline{u}(\varphi)) \cdot \underline{n} \text{ sur } \Sigma^+ \cup \Sigma^- \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\hat{V}}) \cdot \underline{n} = -\underline{\underline{\sigma}}(\rho^\lambda \underline{u}(\varphi)) \cdot \underline{n} \text{ sur } \mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^- \\ \underline{\hat{V}} \sim \underline{0} \text{ quand } \rho \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Le champ  $\rho^\lambda \underline{u}(\varphi)$  est en équilibre dans le secteur  $\mathcal{V}(\mathcal{O})$  (cf. eqn. (2.6<sub>2</sub>)) et il vérifie des conditions de bords libres sur  $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$  (cf. eqn. (2.6<sub>3</sub>)), donc les équations (2.20<sub>2</sub>) et (2.20<sub>3</sub>) se simplifient, ce qui nous permet de réécrire le système (2.20)

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\hat{V}}) = C : \nabla_s^y \underline{\hat{V}} \text{ dans } \Omega_y \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\hat{V}}) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_y \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\hat{V}}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Sigma^+ \cup \Sigma^- \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\hat{V}}) \cdot \underline{n} = -\underline{\underline{\sigma}}(\rho^\lambda \underline{u}(\varphi)) \cdot \underline{n} \text{ sur } \mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^- \\ \underline{\hat{V}} \sim \underline{0} \text{ quand } \rho \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Le théorème de Lax-Milgram peut à présent être appliqué et permet d'affirmer que le problème (2.21) admet une solution.

Finalement, la solution du problème perturbé s'écrit sous la forme du développement intérieur suivant :

$$\underline{U}^\ell(x_1, x_2) = \underline{U}^{(0)}(\mathcal{O}) + K\ell^\lambda(\rho^\lambda \underline{u}(\varphi) + \underline{\hat{V}}(y_1, y_2)) + \dots \quad (2.22)$$

On voit que  $\underline{\hat{V}}$  est solution d'un problème (cf. (2.21)) posé sur un domaine non-borné, donc numériquement impossible à résoudre. L'écueil est contourné en bornant artificiellement le domaine  $\Omega_y$  par une portion de cercle  $\Gamma^\infty$  de rayon  $R$  grand devant 1 ( $R \geq 200$ ) (cf. Fig. 2.5).

La condition (2.16<sub>5</sub>) signifie que simultanément la fonction  $\underline{\hat{V}}$  et sa dérivée, i.e. les déplacements et les contraintes, tendent vers 0 à l'infini. Or il est numériquement impossible d'imposer à la fois des conditions de Dirichlet et de Neumann sur  $\Gamma^\infty$ . En pratique, on choisit d'imposer une condition de Dirichlet sur  $\Gamma^\infty$ . Cette condition est en effet plus efficace et plus facile à mettre en oeuvre car elle empêche les mouvements

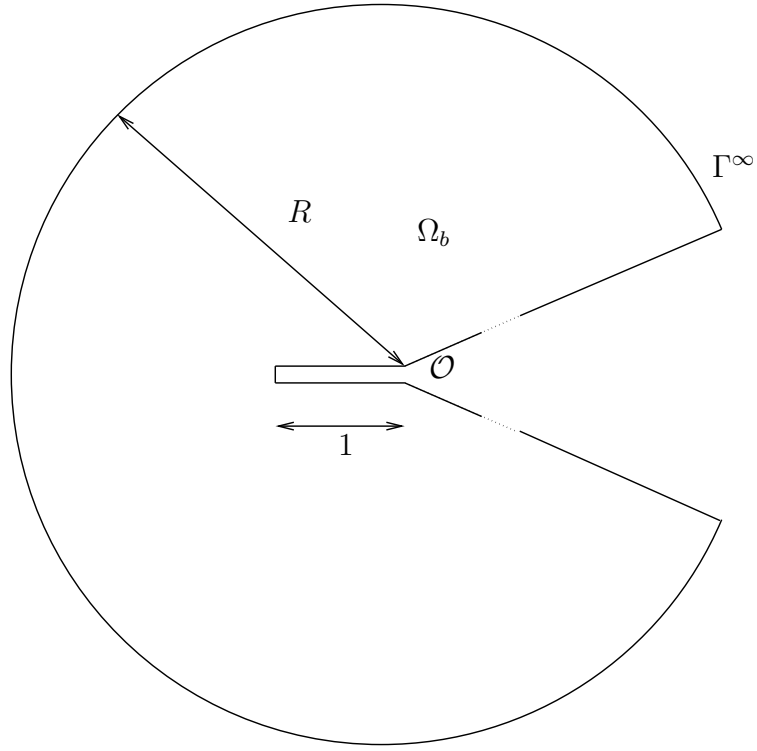


FIG. 2.5 – Le domaine intérieur borné utilisé dans la modélisation.

de corps rigide. Cependant, la solution obtenue en imposant des contraintes nulles sur  $\Gamma^\infty$  converge vers celle obtenue en imposant un déplacement nul sur  $\Gamma^\infty$ , lorsque le rayon  $R$  augmente.

Il est à noter que, du fait que le domaine est à présent borné par le contour  $\Gamma^\infty$ , on peut également résoudre le problème (2.16) sur  $\Omega_b$ , avec, là encore, une alternative pour les conditions à imposer sur  $\Gamma^\infty$  :

$$\begin{aligned}
 \text{Dirichlet} & : \quad \underline{V}_{|\Gamma^\infty}^{(1)} = \rho^\lambda \underline{u}(\varphi) \\
 \text{ou Neumann} & : \quad \left( \underline{\underline{\sigma}}(\underline{V}^{(1)}) \cdot \underline{n} \right)_{|\Gamma^\infty} = \underline{\underline{\sigma}}(\rho^\lambda \underline{u}(\varphi)) \cdot \underline{n}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$


---



## Chapitre 3

### Le critère mixte

Le critère mixte s'inspire d'expériences menées sur des composites multi-couches ( $0^\circ$ - $90^\circ$ - $0^\circ$ ) par Parvizi *et al.* [PG78] (cf. Fig. 3.1 (a)). Les mesures expérimentales du chargement à rupture (qui suivent approximativement la courbe continue sur la figure 3.1 (b)) mettent en évidence deux domaines délimités par une épaisseur de pli critique  $e_0$  : pour les plis d'épaisseur  $e \leq e_0$ , le chargement critique est d'autant plus grand que  $e$  est petite, tandis que pour les plis d'épaisseur  $e \geq e_0$ , le chargement critique ne dépend plus de  $e$ .

Si l'on retient seulement un critère de contrainte maximum pour analyser la rupture transverse du pli intérieur du multi-couches, les résultats indiquent un chargement critique identique quelle que soit l'épaisseur du pli (courbe pointillée sur la figure 3.1 (b)). Au contraire, si l'on utilise seulement un critère énergétique, le chargement critique décroît avec l'augmentation de l'épaisseur du pli (courbe tiretée sur la figure 3.1 (b)). L'expérience met donc en évidence la complémentarité des deux critères : lorsque  $e$  est petite, la rupture est conditionnée par le critère en énergie, la contrainte maximum pouvant être atteinte et même dépassée ; lorsque  $e$  est grande, l'énergie disponible pour la création de fissures est plus importante à cause du plus grand volume, c'est donc la condition en contrainte qui régit la rupture.

Dans le cas qui nous intéresse, il apparaît également que les deux critères sont nécessaires pour décrire le mécanisme d'amorçage. En effet, un critère mettant en jeu une contrainte maximum est vérifié quel que soit le chargement puisque les contraintes sont infinies au voisinage du point singulier (dans le cadre de l'élasticité). L'idée est alors de considérer la contrainte à une certaine distance du point singulier [MC58, N69, S94, L02]. Cette distance peut être déterminée à l'aide du critère de rupture d'Irwin pour la fissure, soit avec une condition de type « point-stress » [MC58], soit avec une condition de type « contrainte moyenne » [N69, S94]. Pour Leguillon

---

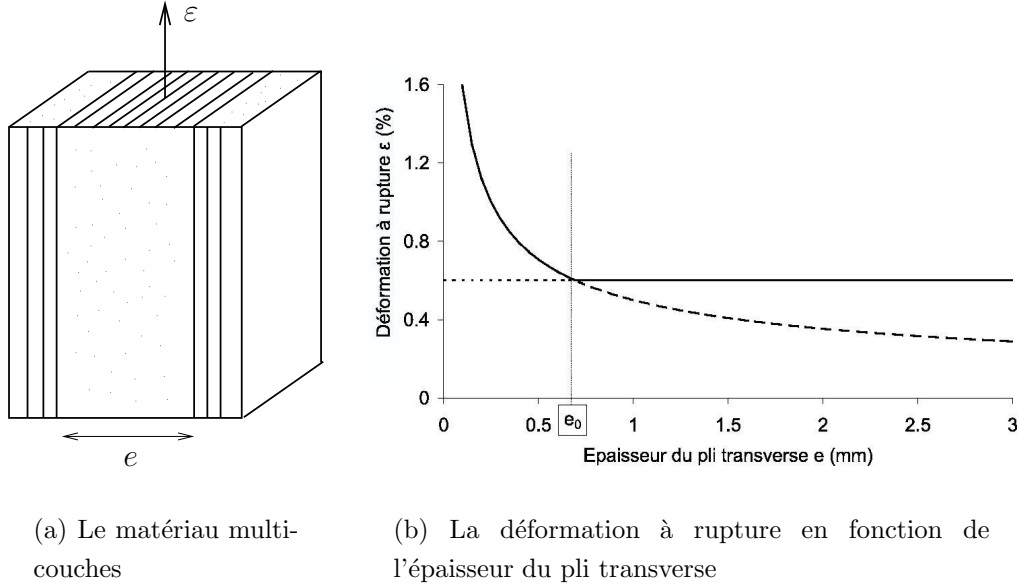


FIG. 3.1 – Les expériences de Parvizi, Garrett et Bailey [PG78].

[L02], la distance obtenue par le critère en contrainte s'interprète comme une borne supérieure de longueurs de fissure admissibles, une borne inférieure étant obtenue par le critère en énergie. La compatibilité des deux bornes fournit une longueur, qui s'interprète alors comme LA longueur d'amorçage (l'interprétation est légèrement différente dans les cas particuliers de la fissure ou du bord droit, cf. section 3.3). Cette longueur dépend de la géométrie locale, contrairement aux longueurs proposées dans [MC58] et [N69].

### 3.1 La condition en énergie

Cette condition est issue d'un bilan d'énergie entre l'état final (structure fissurée) et l'état initial (structure non fissurée) de la structure :

$$\delta K + \delta P + \mathcal{G}_c \delta S = 0 \quad (3.1)$$

où :

- $\delta K$  est la variation d'énergie cinétique,
- $\delta P$  est la variation d'énergie potentielle,
- $\mathcal{G}_c \delta S$  est l'énergie dissipée par la création de la fissure de surface  $\delta S$ , dans l'hypothèse de déformations planes, avec  $\delta S = b \ell$  ( $b$  étant l'épaisseur de l'éprouvette et  $\ell$  la longueur de la fissure), et  $\mathcal{G}_c$  la densité d'énergie de rup-



ture par unité de surface du matériau, appelée ténacité.

L'état initial est supposé être à l'équilibre, sous l'hypothèse de chargement quasi-statique. L'énergie cinétique de la structure ne peut donc qu'augmenter :  $\delta K \geq 0$ .

De l'équation (3.1), on tire donc l'inégalité :

$$\delta P + \mathcal{G}_c \delta S \leq 0 \quad (3.2)$$

On dénote par  $\mathcal{G}$  le taux de restitution de l'énergie (incrémental) défini par

$$\mathcal{G} = -\frac{\delta P}{\delta S} \quad (3.3)$$

L'inégalité (3.2) signifie que s'il y a rupture, alors  $\delta S \neq 0$ , ce qui implique  $\mathcal{G} \geq \mathcal{G}_c$ . C'est une condition nécessaire de rupture.

La variation d'énergie potentielle  $\delta P$  vaut  $P^\ell - P^0$ , où :

$$P^\ell = b \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega^\ell} C : \nabla_s \underline{U}^\ell : \nabla_s \underline{U}^\ell dx \right) \quad (3.4)$$

est l'énergie potentielle de la structure perturbée, et

$$P^0 = b \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega^0} C : \nabla_s \underline{U}^{(0)} : \nabla_s \underline{U}^{(0)} dx \right) \quad (3.5)$$

est l'énergie potentielle de la structure saine.

*Remarque :* L'élément d'intégration  $dx$  représente la variation élémentaire de surface ( $dx = dx_1 dx_2$ ).

Les conditions aux limites et la symétrie du tenseur d'élasticité  $C$  permettent de réécrire la différence des énergies potentielles à l'aide de l'intégrale indépendante du contour définie en (2.8) et utilisée pour le calcul du FICG (cf. Annexe B) :

$$\delta P = b \mathcal{H}(\underline{U}^{(0)}, \underline{U}^\ell) \quad (3.6)$$

En remplaçant  $\underline{U}^{(0)}$  et  $\underline{U}^\ell$  par leurs expressions (2.5) et (2.22), il vient (cf. Annexe B) :

$$\delta P = b K^2 \ell^{2\lambda} \mathcal{H}(\rho^\lambda \underline{u}(\varphi), \hat{\underline{V}}) + \dots \quad (3.7)$$

Ainsi le taux de restitution de l'énergie  $\mathcal{G}$  s'écrit, au premier ordre (cf. expression (3.3)) :

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= -\frac{bK^2\ell^{2\lambda}}{b\ell}\mathcal{H}(\rho^\lambda\underline{u}(\varphi),\hat{\underline{V}}) \\ &= K^2\ell^{2\lambda-1}\mathcal{A}\end{aligned}\tag{3.8}$$

avec

$$\mathcal{A} = -\mathcal{H}(\rho^\lambda\underline{u}(\varphi),\hat{\underline{V}}) = \mathcal{H}(\hat{\underline{V}},\rho^\lambda\underline{u}(\varphi))\tag{3.9}$$

La linéarité des lois de comportement nous autorise à effectuer le calcul de  $\hat{\underline{V}}$  (cf. système (2.21)) pour un module de Young unitaire  $\bar{E} = 1$  MPa. D'après l'équation (3.9), le coefficient  $\bar{\mathcal{A}}$  calculé pour  $\bar{E} = 1$  MPa est donc relié au coefficient réel  $\mathcal{A}$  par la relation

$$\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}E\tag{3.10}$$

On présente en tableau 3.1 les valeurs de  $\bar{\mathcal{A}}$ .

$\omega \text{ (}^\circ\text{)}$	0	30	60	90	120	160	180
$\bar{\mathcal{A}}$	5.670	5.648	5.416	4.900	4.040	2.521	1.771

TAB. 3.1 – Valeurs numériques de  $\bar{\mathcal{A}}$ .

Finalement, la condition en énergie s'écrit :

$$K^2\ell^{2\lambda-1}\mathcal{A} \geq \mathcal{G}_c\tag{3.11}$$

La condition en énergie (3.11) a un caractère incrémental puisqu'elle fait apparaître explicitement la longueur de fissure  $\ell$ . C'est une conséquence directe du principe de conservation de l'énergie, contrairement à un critère de type Griffith, par exemple, qui suppose en plus l'existence d'une dérivée.

## 3.2 La condition en contrainte

On constate sur certaines expériences que l'une des conditions nécessaires à l'amorçage d'une fissure de longueur  $\ell$  est que la contrainte de traction  $\sigma_{22}$  soit supérieure à la résistance en traction  $\sigma_c$  du matériau, sur le trajet anticipé de la fissure. Comme la contrainte décroît avec  $r$  (le champ de contraintes s'exprime en  $r^{\lambda-1}$ , avec  $\lambda < 1$  pour  $\omega < 180^\circ$ ), cette condition peut se résumer à :

$$\sigma_{22}(\ell) \geq \sigma_c \quad (3.12)$$

L'écriture de la condition en contrainte utilise le champ de contraintes de la structure non perturbée, i.e. avant apparition de la fissure. En utilisant la notation donnée en (2.6<sub>1</sub>), celui-ci s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^{(0)}) = K r^{\lambda-1} \underline{\underline{s}}(\varphi) + \dots \quad (3.13)$$

Avec un mode  $\underline{u}$  normalisé de manière à ce que  $s_{\varphi\varphi}(\varphi = \pi) = 1$  (cf. eqn. (2.7)), la composante de traction  $\sigma_{22}$  à la distance  $\ell$  s'écrit donc :

$$\sigma_{22}(\ell) = K \ell^{\lambda-1} \quad (3.14)$$

Et finalement, la condition en contrainte devient :

$$K \ell^{\lambda-1} \geq \sigma_c \quad (3.15)$$

### 3.3 Le critère mixte

L'amorçage a lieu lorsque la condition en contrainte ET la condition en énergie sont remplies. A part dans les cas limites de la fissure et du bord droit, ces deux conditions réunies fournissent la longueur d'amorçage  $\ell_0$ .

En effet, si  $K$  est positif et si  $\lambda \neq 1$  (i.e.  $\omega \neq 180^\circ$ ), l'inégalité (3.15) fournit une borne supérieure pour  $\ell$  :

$$\ell_{sup} = \left( \frac{K}{\sigma_c} \right) \frac{1}{1 - \lambda} \quad (3.16)$$

Le signe de  $K$  indique si le chargement imposé tend à ouvrir ou fermer la fissure : si le FICG calculé avec le mode singulier normalisé à l'aide de la relation (2.7) est positif, cela signifie que le chemin anticipé de la fissure se trouve en traction, donc que le chargement tend à ouvrir la fissure. On verra dans la partie II (chapitre 2) qu'un chargement thermique par exemple peut placer le trajet de la fissure en compression, donc empêcher l'amorçage de la fissure.

Dans le cas présent, le chargement appliqué induit une contrainte de traction au voisinage du point singulier, ce qui est confirmé par le calcul du FICG  $K$  (cf. chapitre 4).

Si  $\lambda \neq 0.5$  (i.e.  $\omega \neq 0^\circ$ ), l'inégalité (3.11) fournit une borne inférieure de longueurs admissibles :

$$\ell_{inf} = \left( \frac{\mathcal{G}_c}{\mathcal{A}K^2} \right) \frac{1}{2\lambda - 1} \quad (3.17)$$

On voit donc que, à l'exception du cas de la fissure, le bilan d'énergie prédit un amorçage brutal, i.e. un saut de la fissure, qui passe d'une longueur nulle à une longueur finie : pour un chargement donné provoquant la rupture, la borne inférieure ne s'annule pas.

Si le chargement est monotone croissant, le FICG  $K$  augmente linéairement avec celui-ci, donc  $\ell_{sup}$  augmente (cf. eqn. (3.16)) et  $\ell_{inf}$  diminue (cf. eqn. (3.17)). Il existe donc un chargement critique  $K = K_c$  tel que les deux bornes coïncident, ce qui fournit la longueur d'amorçage :

$$\ell_0 = \frac{\mathcal{G}_c}{\mathcal{A}\sigma_c^2} \quad (3.18)$$

La longueur d'amorçage  $\ell_0$  est indépendante du chargement. Elle dépend uniquement des propriétés de rupture  $\mathcal{G}_c$  et  $\sigma_c$  du matériau, et, à travers  $\mathcal{A}$ , de ses propriétés élastiques et de la géométrie locale. Comme la microstructure du matériau n'intervient pas dans les équations, il est difficile d'affirmer, comme Novozhilov [N69], que  $\ell_0$  dépend directement de celle-ci, bien que  $\mathcal{G}_c$  et  $\sigma_c$  soient reliées à la microstructure d'une certaine façon. La longueur  $\ell_0$  n'est pas nécessairement une longueur d'arrêt, elle doit être interprétée comme une longueur en-dessous de laquelle il n'existe pas d'état d'équilibre possible, puisque le bilan d'énergie conclut que l'amorçage est un saut de la fissure d'une longueur nulle à cette longueur  $\ell_0$ , pour le chargement correspondant à  $K_c$ .

Le chargement critique, transcrit en termes de FICG critique, est obtenu en substituant (3.18) dans l'équation (3.16) (ou (3.17)) :

$$K_c = \left( \frac{\mathcal{G}_c}{\mathcal{A}} \right)^{1-\lambda} (\sigma_c)^{2\lambda-1} \quad (3.19)$$

Le FICG critique  $K_c$  dépend, comme  $\ell_0$ , des propriétés d'élasticité et de rupture du matériau, et de la géométrie locale à travers  $\mathcal{A}$  et  $\lambda$ .

### *Cas particuliers*

Si  $\lambda = 1$  (cas du bord droit), l'inégalité (3.15) devient :

$$K \geq \sigma_c \quad (3.20)$$

Il n'y a plus de borne supérieure. Compte-tenu de la normalisation (2.7), le FICG  $K$  s'interprète comme la tension parallèle au bord (il a bien la dimension d'une contrainte dans ce cas-là puisqu'il s'exprime en  $\text{MPa}\cdot\text{mm}^{1-\lambda}$ ). L'équation (3.20) est donc tout simplement le critère en contrainte, et la longueur  $\ell_0$ , obtenue par l'équation (3.17), s'interprète alors comme la longueur minimale d'amorçage.

Si  $\lambda = 0.5$  (cas de la fissure), l'inégalité (3.11) devient :

$$K \geq \sqrt{\frac{\mathcal{G}_c}{\mathcal{A}}} \quad (3.21)$$

Il n'y a plus de borne inférieure. Toute longueur inférieure à la borne supérieure obtenue par l'équation (3.16) est admissible ; en particulier les longueurs infinitésimales sont également permises, on retrouve alors le critère différentiel de Griffith [G20] :

$$\mathcal{G}_d = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \left( -\frac{\delta P}{\delta S} \right) = -\frac{\partial P}{\partial S} \geq \mathcal{G}_c \quad (3.22)$$

L'inégalité (3.21) n'est autre que le critère d'Irwin [I57]. En effet,  $K$  s'identifie à  $K_I$ , le facteur d'intensité des contraintes du mode  $I$ , à un facteur  $2\pi$  près, et on vérifie numériquement que  $\sqrt{\frac{\mathcal{G}_c}{\mathcal{A}}} = K_{Ic}$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{A} = 2\pi \frac{1-\nu^2}{E}$  (cf. Tab. 3.1).

La forme de l'énergie potentielle n'est pas toujours une fonction monotone croissante de  $\ell$  [ML04, PM07].

C'est le cas par exemple d'une singularité forte ( $\lambda < 0.5$ ), cas qui n'est pas traité dans ce mémoire. On voit que le critère en énergie (3.11) fournit alors également une borne supérieure de longueurs d'amorçage. Dans ce cas, les longueurs de fissure infinitésimales sont permises, l'amorçage n'est pas forcément brutal.

L'énergie potentielle s'exprime à l'aide des champs asymptotiques au voisinage du point singulier. Si ceux-ci contiennent plusieurs modes (le mode antisymétrique, les modes correspondant à des contraintes résiduelles (cf. partie II, chapitre 3, ...), le taux de restitution de l'énergie s'exprime comme une somme de puissances de  $\ell$ , qui n'est pas forcément une fonction monotone de  $\ell$ .



## Chapitre 4

### Résultats

On présente dans le tableau 4.1 les résultats pour la longueur d’amorçage  $\ell_0$  et le FICG critique  $K_c$ , obtenus à partir des valeurs de  $\lambda$  et  $\mathcal{A}$  données respectivement dans les tableaux 2.1 et 3.1 et des paramètres matériau rappelés en Annexe A. Pour plus de lisibilité, les  $K_c$  sont représentés en Fig. 4.1.

$\omega$ (°)	0	30	60	90	120	160	180
$\ell_0$ ( $\mu\text{m}$ )	39.2*	39.3	41.0	45.4	55.0	88.2	125.5 **
$K_c$ (MPa.mm <sup>1-<math>\lambda</math></sup> )	14.8	15.0	15.8	18.3	24.6	48.3	75

TAB. 4.1 – Valeurs numériques de  $\ell_0$  et  $K_c$  (pour  $\omega = 0^\circ$ ,  $\ell_0^*$  : borne supérieure, pour  $\omega = 180^\circ$ ,  $\ell_0^{**}$  : borne inférieure).

On voit que les longueurs de fissure restent très petites devant les dimensions de l’éprouvette ( $148 \times 90 \times 10$  mm), ce qui valide la démarche effectuée. Les valeurs de  $K_c$  varient très peu en fonction de l’angle  $\omega$  jusqu’à  $\omega = 60^\circ$ , puis augmentent fortement. La longueur d’amorçage de même que le FICG critique augmentent avec l’angle d’entaille. Cela signifie que plus l’angle d’entaille sera important, plus il sera difficile de faire amorcer une fissure en sa pointe. Et la longueur minimale d’amorçage sera d’autant plus grande que l’entaille a un angle important.

Pour pouvoir comparer les résultats théoriques aux mesures expérimentales, l’essai de traction est simulé par éléments finis. En pratique, les essais sont conçus pour une étude plus générale, permise par l’inclinaison  $\beta$  de la direction de sollicitation (cf. Fig. 4.2).

Le cas qui nous intéresse correspond à  $\beta = 0$ . Si  $\beta$  est non nul, le champ extérieur asymptotique (cf. eqn. (2.5)) doit alors tenir compte du mode antisymétrique. Le

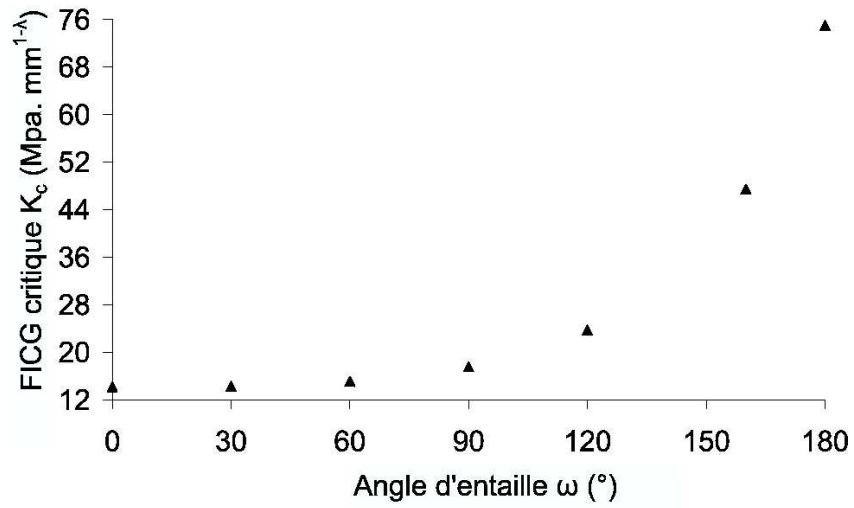


FIG. 4.1 – Le FICG critique  $K_c$  en fonction de l'ouverture de l'entaille  $\omega$ .

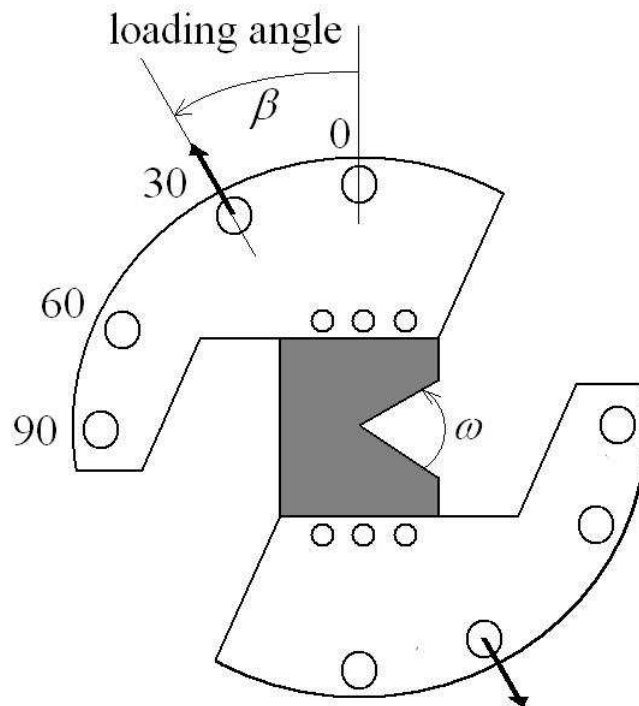


FIG. 4.2 – Montage des essais en traction-cisaillement



modèle comprend une inconnue supplémentaire  $\varphi_0$  qui est la direction d'amorçage de la fissure. La double condition du critère mixte permet de déterminer deux équations  $\ell = \ell(\varphi_0)$  et  $K_c = K_c(\varphi_0)$ , et la direction d'amorçage  $\varphi_0$  correspond au  $K_c$  minimum ([YP06] pour la flexion 3 points, [LR07] pour un chargement en traction-cisaillement).

La linéarité des équations du problème permet d'effectuer la simulation avec un chargement en déplacement imposé de 1 mm sur  $\Gamma_u$ , et avec un module de Young de 1 MPa. A ce chargement correspondent un facteur d'intensité des contraintes généralisé  $\bar{K}$  et une résultante  $\bar{R}$ , qui sont calculés numériquement [LR07] et recensés dans le tableau 4.2.

$\omega$ (°)	0	30	60	90	120	160
$\bar{K}$ ( $10^{-2} \text{ mm}^{1-\lambda}$ )	9.734	9.743	9.802	9.583	8.651	5.715
$\bar{R}$ (mm)	0.715	0.714	0.711	0.695	0.649	0.525

TAB. 4.2 – Valeurs numériques de  $\bar{K}$  et  $\bar{R}$  pour un déplacement imposé de 1 mm et un module de Young de 1 MPa (le cas du bord droit ( $\omega = 180^\circ$ ) ne nécessite pas le calcul de  $\bar{K}$  et de  $\bar{R}$ ).

Le FICG  $\bar{K}$  calculé correspond à un déplacement de 1 mm, autrement dit à  $\bar{R} \times b$ , où  $b$  est l'épaisseur de l'éprouvette dans la direction normale au plan d'étude. A la rupture, la force appliquée  $F$  correspond au FICG critique  $K_c$ . On a donc la relation :

$$F = \bar{R}b \frac{K_c}{\bar{K}} \quad (4.1)$$

On montre en figure 4.3 la comparaison entre le modèle et les résultats expérimentaux. L'axe des ordonnées correspond à la force réelle  $F$  ramenée à la force à rupture pour le cas de la fissure ( $F_0$ ). La courbe correspond logiquement à l'évolution de  $K_c$  (cf. Fig. 4.1), conformément à l'expression (4.1), le rapport  $\frac{\bar{R}}{\bar{K}}$  diminuant peu avec l'augmentation de  $\omega$ .

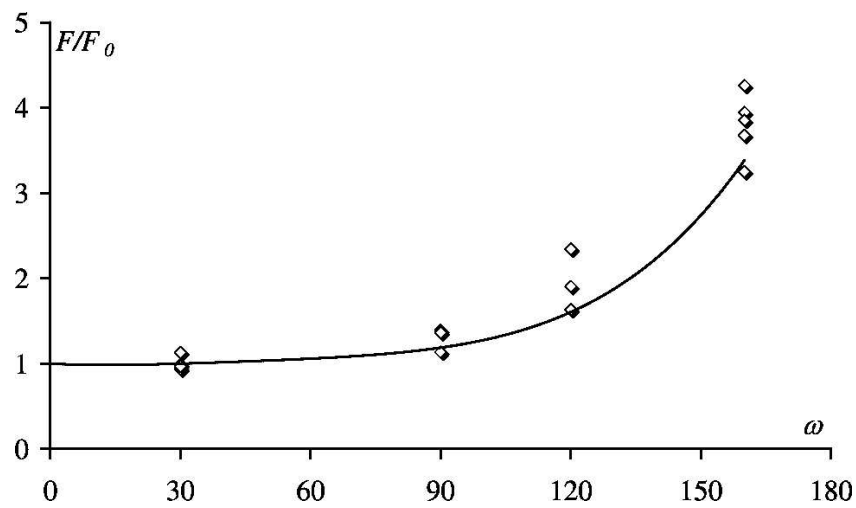


FIG. 4.3 – La force à rupture (adimensionnée) en fonction de l'ouverture d'entaille  $\omega$ .  
Losanges : résultats expérimentaux ; courbe continue : résultats théoriques.

## Chapitre 5

# Comparaison avec un modèle de zone cohésive

Dans les chapitres précédents, on a établi le critère mixte dans le cas d'un matériau homogène. Ce critère nécessite la connaissance de deux paramètres de rupture,  $\mathcal{G}_c$  et  $\sigma_c$ , et sa mise au point passe par les développements asymptotiques raccordés.

La première conséquence tirée du bilan d'énergie est que, dans la plupart des cas, il y a un saut de la longueur de fissure, qui passe de 0 à  $\ell_0 > 0$  finie : l'amorçage est instable. Il est donc intéressant de comparer le critère mixte à des modèles de zone cohésive. Ces modèles sont basés sur une loi d'endommagement progressif, on peut donc supposer qu'ils prédisent un amorçage moins brutal, i.e. une croissance régulière de la fissure. Ici encore, on s'intéresse uniquement à l'amorçage de la fissure, pas à sa propagation ultérieure.

On compare donc le critère mixte à un modèle de zone cohésive, celui de Dugdale [D60]. L'analyse utilise également les développements asymptotiques raccordés, mais cette fois en considérant pour paramètre  $\ell$  la longueur d'une zone cohésive sur laquelle s'exercent des efforts.

Ce chapitre reprend un article paru dans les Comptes-Rendus Mécanique de l'Académie des Sciences ([HL07a] : C. Henninger, D. Leguillon, E. Martin, Crack initiation at a V-notch - Comparison between a brittle fracture criterion and the Dugdale cohesive zone model).

### 5.1 Introduction

Within the framework of plane elasticity, the initiation of failure at a V-notch in brittle elastic materials under symmetric loading has been successfully predicted

---

with a mixed criterion based on the critical value of a generalized stress intensity factor (GSIF) ([L02, YBG04]). Alternatively it can be assumed that a fracture process zone is active in front of the notch tip. The associated cohesive forces can depend on the local opening for a damage model [B59, C89, N90, AL92, AC01, GE03] or keep constant for a model of perfect plasticity [D60]. The latter is chosen to carry on a comparison with the mixed criterion. The constant force is taken equal to the tensile strength  $\sigma_c$  of the material and the crack onset is assumed to occur as :

$$\delta(\mathcal{O}) = \delta_c = \frac{\mathcal{G}_c}{\sigma_c} \quad (5.1)$$

where  $\delta(\mathcal{O})$  is the cohesive zone opening at the notch tip  $\mathcal{O}$  and  $\mathcal{G}_c$  is the fracture toughness (see Fig. 5.1). Herein a two-scale analysis using singular elastic fields is carried out and provides the critical GSIF for a set of notch angles. The critical load predictions are compared with those of the mixed criterion ([L02]) and an analysis is made on the stability of the failure mechanism in both models.

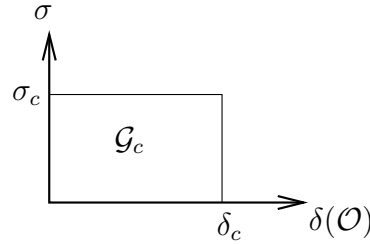


FIG. 5.1 – The Dugdale cohesive model.

## 5.2 The cohesive zone model

We consider a V-notched specimen (angle  $\omega$ , dimensions :  $148 \times 90 \times 10$  mm) of PMMA (Young's modulus :  $E=3250$  MPa, Poisson's ratio :  $\nu = 0.3$ , tensile strength :  $\sigma_c = 75$  MPa, fracture toughness :  $\mathcal{G}_c = 350$  J.m<sup>-2</sup>) subjected to a uniaxial tension or displacement (see Fig. 5.2 left). The crack is expected to grow orthogonally to the direction of solicitation thus we introduce a cohesive zone of length  $\ell$  in front of the notch tip in that direction. The length  $\ell$  is *a priori* unknown, what makes the problem non-linear.

This length  $\ell$  is assumed to be small in regard of the specimen dimensions. Thus the analysis is, in a first step, carried out in an "outer" domain, where the cohesive zone is not visible, i.e.  $\ell \rightarrow 0$  (Fig. 5.2 right). The displacement field in that "outer" domain expands in the vicinity of the notch tip  $\mathcal{O}$  as :

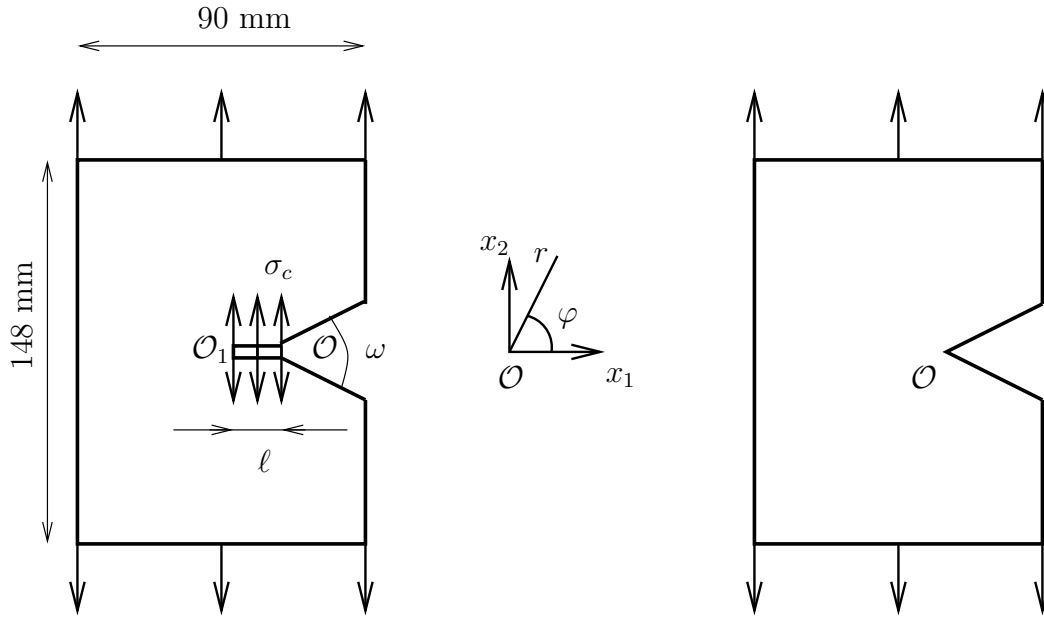


FIG. 5.2 – The actual problem (left) and the "outer" domain (right).

$$\underline{U}(x_1, x_2) = \underline{U}(\mathcal{O}) + Kr^\lambda \underline{u}(\varphi) + \dots \quad (5.2)$$

The constant term  $\underline{U}(\mathcal{O})$  is the rigid translation of the origin,  $(x_1, x_2)$  and  $(r, \varphi)$  are respectively the Cartesian and polar coordinates with the origin at point  $\mathcal{O}$  (cf. Fig. 5.2).

The term  $r^\lambda \underline{u}(\varphi)$  is the symmetric mode associated with the singularity  $\lambda$ . The exponent  $\lambda$  is the characteristic exponent of the singularity (smaller the exponent, more critical the singular point) and  $\underline{u}$  is the associated displacement mode; they depend on  $\omega$  and are known analytically or can be computed using a general procedure ([LSP87]). As  $\lambda$  ranges between 0.5 and 1 ([W52] and Tab. 5.1), the associated stress field increases to infinity when approaching  $\mathcal{O}$ .

The scalar  $K$  is the GSIF, it depends on the global geometry and on the loading. The dots correspond to further non singular terms of the expansion.

Next the analysis is carried out in an "inner" unbounded domain obtained by stretching the actual domain by  $1/\ell$  and then considering the limit  $\ell \rightarrow 0$ . In this inner domain, the cohesive zone has a fixed (unit) length, therefore the non-linearity disappears and the problem splits in two parts  $\mathcal{P}_A$  and  $\mathcal{P}_B$ .

$\omega (^\circ)$	0	30	60	90	120	160	180
$\lambda$	0.5	0.502	0.512	0.545	0.616	0.819	1
$K_I^A$ (mm <sup>-0.5</sup> )	0.993	0.995	0.987	0.966	0.932	0.851	0.791
$K_I^B$ (mm <sup>-0.5</sup> )	0.6347	0.6354	0.6354	0.6457	0.6696	0.7354	0.7916
$\mathcal{A}$ (10 <sup>-3</sup> MPa <sup>-1</sup> )	1.587	1.581	1.517	1.372	1.131	0.706	0.496

TAB. 5.1 – Numerical values of  $\lambda$ ,  $K_I^A$ ,  $K_I^B$  and  $\mathcal{A}$ .

Matched asymptotics allow writing the solution to  $\mathcal{P}_A$  as ([L02]) :

$$\underline{U}^A(x_1, x_2) = \underline{U}(\mathcal{O}) + K\ell^\lambda \underline{V}^A(y_1, y_2) + \dots \quad (5.3)$$

where  $(y_1, y_2)$  are the stretched Cartesian coordinates ( $y_i = x_i/\ell$ ). The displacement field  $\underline{V}^A$  fulfils stress-free conditions on the cohesive zone and notch faces and behaves like  $\rho^\lambda \underline{u}(\varphi)$  as  $\rho \rightarrow \infty$ , with  $\rho = r/\ell$ , as a consequence of matching conditions.

As well, the solution to  $\mathcal{P}_B$  writes :

$$\underline{U}^B(x_1, x_2) = -\sigma_c \ell \underline{V}^B(y_1, y_2) + \dots \quad (5.4)$$

where  $\underline{V}^B$  fulfils a unit tensile condition on the crack faces, stress-free conditions on the notch faces and vanishing remote conditions at infinity.

Eqns. (5.3) and (5.4) provide the total displacement field solution to the cohesive zone problem :

$$\underline{U}^\ell(x_1, x_2) = \underline{U}(\mathcal{O}) + K\ell^\lambda \underline{V}^A(y_1, y_2) - \sigma_c \ell \underline{V}^B(y_1, y_2) + \dots \quad (5.5)$$

The Williams' expansions of  $\underline{V}^A$  and  $\underline{V}^B$  in the vicinity of the tip  $\mathcal{O}_1$  (cf. Fig. 5.2) write :

$$\underline{V}^A(y_1, y_2) = \underline{V}^A(\mathcal{O}_1) + K_I^A \sqrt{\rho} \underline{u}_I(\varphi) + \dots \quad (5.6)$$

$$\underline{V}^B(y_1, y_2) = \underline{V}^B(\mathcal{O}_1) + K_I^B \sqrt{\rho} \underline{u}_I(\varphi) + \rho \underline{v}(\varphi) + \dots \quad (5.7)$$

and thus eqns. (5.5), (5.6) and (5.7) provide :

$$\underline{U}^\ell(x_1, x_2) = \underline{U}(\mathcal{O}) + (K_I^A K\ell^\lambda - K_I^B \sigma_c \ell) \sqrt{\rho} \underline{u}_I(\varphi) - \sigma_c \ell \rho \underline{v}(\varphi) \dots \quad (5.8)$$

where  $K_I^A$  and  $K_I^B$  scale the intensity of the singular stress field associated with a crack in an homogeneous material, and  $\underline{u}_I$  is the opening mode (since the loading and

the geometry are symmetric, the shear mode  $II$  vanishes). The non singular term  $\rho \underline{v}(\varphi)$  corresponds to the constant stress conditions on the two faces of the cohesive zone. The fields  $\underline{V}^A$  and  $\underline{V}^B$  are computed using a finite element method and the GSIF's  $K_I^A$  and  $K_I^B$  are extracted using a path-independent integral ([LSP87]) (see Tab. 5.1).

### 5.3 The crack onset predictions

According to eqn. (5.5) the opening at the notch tip writes :

$$\delta(\mathcal{O}) = K \ell^\lambda [V^A](\mathcal{O}) - \sigma_c \ell [V^B](\mathcal{O}) \quad (5.9)$$

The notation  $[V]$  denotes the opening (the normal discontinuity) of  $\underline{V}$ .

The cohesive zone is such that the stress field at the tip  $\mathcal{O}_1$  is smooth ([B59, D60]). Using the expansion (5.8), this condition writes :

$$K_I^A K \ell^\lambda - K_I^B \sigma_c \ell = 0 \quad (5.10)$$

giving an equation for the cohesive zone length  $\ell$  in function of the load (through  $K$ ), provided the opening  $\delta(\mathcal{O})$  does not exceed the critical value  $\mathcal{G}_c/\sigma_c$  (see eqn. (5.1)).

Combining eqns. (5.1), (5.9) and (5.10) provides the failure GSIF  $K_c^z$  (the critical value of  $K$ ) for the cohesive zone model :

$$K_c^z = \left( \frac{\mathcal{G}_c}{\hat{\mathcal{A}}} \right)^{1-\lambda} (\sigma_c)^{2\lambda-1} \quad (5.11)$$

$$\text{with } \hat{\mathcal{A}} = \left( \frac{K_I^A}{K_I^B} \right)^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} [V^A](\mathcal{O}) - \left( \frac{K_I^A}{K_I^B} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} [V^B](\mathcal{O}).$$

On the other hand the mixed criterion, based on two necessary conditions in energy and stress ([L02]), provides the following critical value of the GSIF :

$$K_c = \left( \frac{\mathcal{G}_c}{\mathcal{A}} \right)^{1-\lambda} (\sigma_c)^{2\lambda-1} \quad (5.12)$$

where  $\mathcal{A}$  is a geometrical coefficient (dependent on  $\omega$ ), extracted from  $\underline{V}^A$  by a path-independent integral ([LSP87, L02]) (see Tab. 5.1).

Fig. 5.3 exhibits  $K_c^z$  (circles) and  $K_c$  (cross-shaped markers) as a function of the notch angle  $\omega$ . They are computed using respectively eqns. (5.11) and (5.12) (except

for  $\omega = 180^\circ$ ). The agreement between both criteria is very good. The maximum deviation is smaller than 4% for  $\omega = 160^\circ$ . For  $\omega = 180^\circ$  the critical GSIF is obtained directly from eqn. (5.10) ( $K_c^z = \sigma_c K_I^B / K_I^A$ , noting that, in that case,  $K_I^B = K_I^A$ ), while the mixed criterion provides :  $K_c = \sigma_c$ . The maximal cohesive zone length (i.e. its length at failure) ranges between  $87 \mu\text{m}$  for  $\omega = 0^\circ$  and  $224 \mu\text{m}$  for  $\omega = 160^\circ$ , what is consistent with the initial assumption of smallness and justifies the asymptotic development.

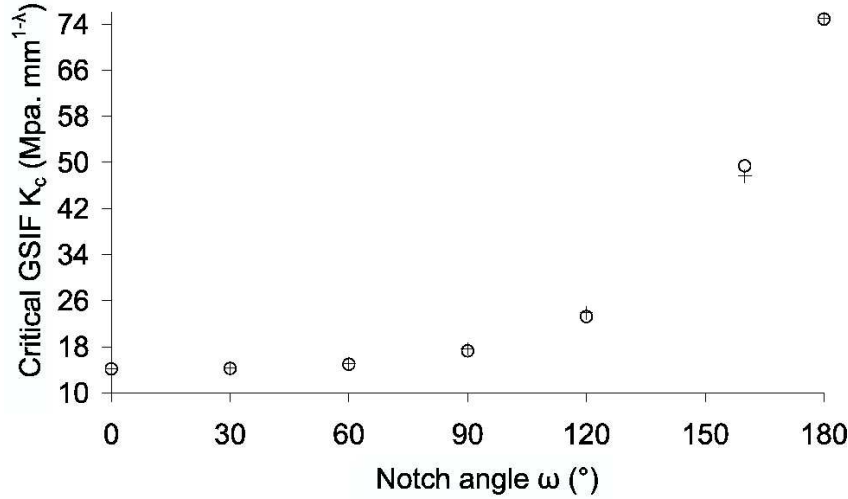


FIG. 5.3 – The critical GSIF's in the cohesive zone model (circles) and in the mixed criterion (cross-shaped markers) vs. the notch angle  $\omega$ .

## 5.4 Stability of the initiation process

The brittle fracture criterion leads to the conclusion that, whatever the kind of applied loads, the initial fracture process is brutal for  $\omega > 0^\circ$  : the crack jumps suddenly to a finite length ([L02]) while for  $\omega = 0^\circ$  the criterion allows infinitesimal crack lengths, as suggested by Griffith [G20]. The question is : does the cohesive model, a damage-like model, lead to the same conclusions ?

To check that, the crack initiation is simulated by unbuttoning the two nodes at the end of the cohesive zone and by computing the opening  $\delta(\mathcal{O}')$  at the end  $\mathcal{O}'$  of the new cohesive zone under the constant critical load  $K_c^z$ . The process will be unstable if  $\delta(\mathcal{O}') > \delta_c$ . Numerically the unbuttoning process consists in splitting the initial cohesive zone of length  $\ell$  (length 1 in the "inner" domain) into a stress-free cracked zone and a zone where cohesive forces are still acting (cf. Fig. 5.4). Eqn.



(5.10) with  $K = K_c^z$  and an updated  $K_I^B$  provide the actual length  $\ell$  (it is checked that it remains small), and the length of the cohesive zone  $\ell_z$  is given by :

$$\ell_z = \ell(1 - Nd) \quad (5.13)$$

where  $N$  is the number of unbuttoned couples of nodes and  $d$  is the mesh size (see Fig. 5.4).

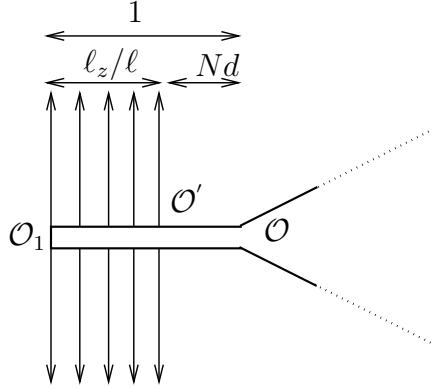


FIG. 5.4 – The modelling of the crack growth.

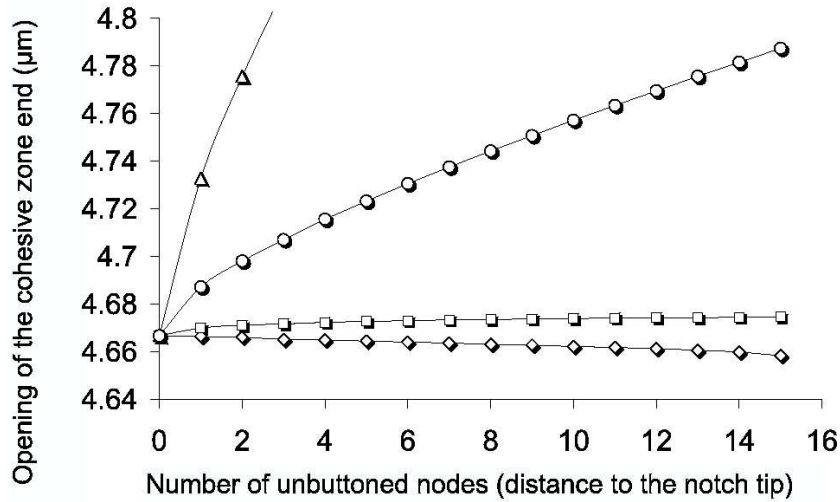


FIG. 5.5 – The opening of the cohesive zone end for  $\omega = 0^\circ$  (diamonds),  $\omega = 30^\circ$  (squares),  $\omega = 60^\circ$  (circles) and  $\omega = 90^\circ$  (triangles) as a function of the distance to the notch tip.

Fig. 5.5 exhibits the opening  $\delta(\mathcal{O}')$  as a function of the number of unbuttoned couples of nodes  $N$ . The crack configuration ( $\omega = 0^\circ$ ) should theoretically exhibit a

constant opening, but a slight (mind the scale along the vertical axis) pollution is visible due to the fact that for FE computations the remote conditions at infinity are replaced by prescribed conditions at a large (but finite) distance from the origin. In the other configurations ( $\omega > 0^\circ$ ) the crack onset is unstable since the cohesive zone end openings exceed the critical value  $\mathcal{G}_c/\sigma_c$  and then the process of unbuttoning must go on. Note that the number  $N$  does not increase to simulate the growth process but to check the independence with respect to the unbuttoned length (mesh independence).

## 5.5 Conclusion

A comparison has been carried on between the mixed criterion and the Dugdale cohesive zone model. The agreement between the two models is excellent and both predict an initially unstable crack growth (except for  $\omega = 0^\circ$ ). Further analyses involving cohesive models where forces depend on the opening (Crisfield or Needleman models for instance, [PM07]) should be very interesting but it can be reasonably expected that they will lead to similar conclusions.

---

## Deuxième partie

### Prise en compte des contraintes résiduelles

---



# Chapitre 1

## Présentation

On a vu dans la première partie la mise en oeuvre du critère mixte dans le cas d'une structure homogène soumise à un chargement mécanique.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'amorçage de fissures aux points situés à l'intersection d'un bord libre et de l'interface entre deux matériaux, sur des structures soumises à des chargements thermiques ou thermo-mécaniques. La direction de l'amorçage est connue par l'expérience, il s'agit de l'interface. La description de l'amorçage au voisinage de ces points peut encore se faire à l'aide des champs asymptotiques singuliers. En effet, dans tous les exemples que nous décrivons, les points situés à l'intersection entre une interface et un bord libre sont des lieux de concentration de contrainte. A la différence du cas d'un matériau homogène, le mode singulier dépend à présent des matériaux en présence.

Les deux chapitres de cette partie concernent des structures ayant subi pendant leur élaboration une variation de température  $\Theta$ , plus précisément un refroidissement ( $\Theta$  est donc négative). On considère un état stabilisé de la structure, à température ambiante, dans lequel le flux de température est nul. Le champ de températures peut donc être pris constant et homogène dans toute la structure. Dans l'étude théorique, le refroidissement est pris en compte à travers les contraintes résiduelles induites par la différence dilatométrique entre les matériaux.

La présence de ces contraintes résiduelles rend l'intégrale de contour  $\mathcal{H}$ , utilisée dans le calcul des FICG  $K$ , dépendante du chemin d'intégration choisi. En effet, le problème thermo-élastique est alors équivalent à un problème purement élastique avec des conditions non homogènes aux bords, ce qui rend l'intégrale  $\mathcal{H}$  dépendante du contour (cf. partie I section 2.2). La difficulté est levée en prenant en compte un terme supplémentaire dans l'expression des champs asymptotiques singuliers. Les contraintes résiduelles thermiques étant constantes dans chaque matériau, le terme supplémentaire dans le champ singulier de déplacements s'exprime en puissance 1

---

de  $r$ , i.e. il n'est pas singulier. Le FICG critique  $K_c$  se trouve lui aussi modifié en conséquence, son expression dépend à présent de l'amplitude du refroidissement.

Là encore, l'amorçage est régi par deux paramètres, la ténacité  $\mathcal{G}_c$  et la résistance en traction  $\sigma_c$ , mais il s'agit de ceux de l'interface. Comme il est difficile de les connaître précisément, on utilise dans les applications, les propriétés du matériau le plus « faible », i.e. le matériau ayant les plus faibles ténacité et résistance en traction. On obtient alors une surestimation des chargements critiques. On suppose en effet que les propriétés de rupture de l'interface sont plus faibles que celles des deux matériaux, sinon la fissuration n'aurait pas lieu à l'interface comme le montrent les résultats d'expériences, mais parallèlement à elle à une faible distance dans le matériau le plus faible.

Le premier exemple (chapitre 2) concerne l'interface entre un composite carbone/carbone et un substrat de cuivre. La structure est soumise à un refroidissement de  $-450^\circ\text{C}$ , ce qui engendre des contraintes résiduelles. Dans un premier temps, le cuivre est considéré comme un matériau élastique (section 2.2). Une analyse plus détaillée introduisant le comportement plastique du cuivre est abordée dans la section 2.3.

Le second exemple (chapitre 3) est donné sous la forme d'un article à paraître dans *Journal of Thermal Stresses* ([HL07b] : C. Henninger, D. Leguillon, Adhesive fracture of an epoxy joint under thermal and mechanical loadings). On y analyse l'amorçage d'une fissure à l'interface entre un joint de colle, de faible épaisseur, et un substrat d'aluminium sous un chargement thermo-mécanique. Sous certaines hypothèses, l'analyse est effectuée sur la couche de colle seule. Les résultats théoriques sont comparés aux mesures expérimentales effectuées par Qian et Akisanya ([QA98a]).

## Chapitre 2

# Bimatériau sous chargement thermique

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre le CEA et le CNRS dans le contexte de la recherche sur la fusion contrôlée par confinement magnétique dans des machines de type « tokamaks » (abréviation du terme russe signifiant « chambre magnétique nucléaire toroïdale »). Il s'agit de la machine TORE SUPRA actuellement en fonctionnement sur le site du CEA Cadarache (Bouches-du-Rhône) et du projet ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) actuellement en construction sur le même site de Cadarache. Ces machines ont pour fonction de prouver expérimentalement l'exploitabilité énergétique de la fusion nucléaire contrôlée. Nombreux sont les domaines scientifiques concernés par la fabrication et le fonctionnement de ces machines : la physique des plasmas bien sûr, mais également la supra-conductivité, la technologie du vide, les technologies du froid ( $1.7K$ ) mais aussi des hautes températures, la science des matériaux et la mécanique de la rupture. En effet, la bonne tenue des matériaux de protection est indispensable au fonctionnement et à la sûreté de l'installation.

Dans le cadre du projet, on s'intéresse ici aux parties soumises à des hauts flux thermiques dans TORE SUPRA : le limiteur pompé toroïdal (LPT) situé dans la partie basse de la machine et dimensionné pour des flux de  $10 \text{ MW.m}^{-2}$ . Les tuiles qui recouvrent ce plancher doivent non seulement résister aux températures élevées induites par les flux de particules, mais également assurer une bonne conduction de cette chaleur vers le circuit de refroidissement. A cette fin, le matériau retenu est un composite à fibres de carbone (CFC), dont l'adhésion au circuit de refroidissement, en Cuivre-Chrome-Zirconium (dénommé cuivre de structure), est assuré par une mince couche de cuivre doux (Cu-OFHC : Oxygen Free High Conductivity). Le cuivre doux a une limite d'élasticité plus faible que le cuivre de structure (cf. Annexe

---

A), et compense par plastification plus précoce, les dilatations différentielles du CFC et du cuivre de structure [M99].

Le LPT est en fait constitué d'éléments de forme allongée ( $L = 495$  mm) et légèrement trapézoïdaux ( $B = 28.4$  mm,  $b = 23$  mm), appelés aiguilles, refroidis par un canal d'eau en aller-retour (cf. Fig. 2.1 (a)). Chaque aiguille est recouverte de vingt tuiles plates dans la partie courante et d'une tuile circulaire à l'embout. On représente en figure 2.1 (b) la section droite dans le plan  $(x_1, x_2)$  d'une aiguille avec les deux canaux de refroidissement (direction  $x_3$ ). Les dimensions moyennes indiquées sur la figure 2.1 (b) sont exprimées en mm. La symétrie de la tuile par rapport à l'axe  $x_1 = -12.5$  mm nous permet de limiter l'étude à la demi-pièce représentée en figure 2.2.

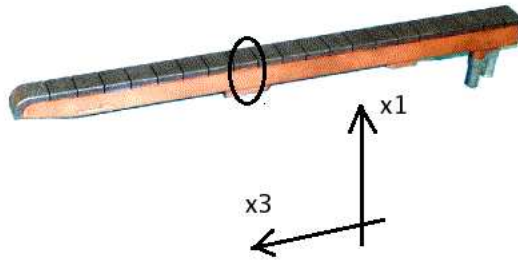
Le matériau indicé par 1 est le composite carbone/carbone (CFC). Il est constitué de plans de fibres de carbone imprégnés par une matrice de carbone [M99]. A cet égard il est orthotrope (les deux directions principales des plans tissés (X et Y) sont équivalentes), mais en termes de rupture de l'interface, la prise en compte de l'anisotropie a peu d'influence. Dans la suite, on considère donc le CFC comme un matériau isotrope, possédant les propriétés des directions principales des plans tissés ([M99] et Annexe A). On néglige également le comportement endommageable de ce composite.

Le matériau indicé par 2 est le cuivre doux (cuivre OFHC), et le matériau de structure (domaine  $\Omega_3$  sur la Fig. 2.2) est le cuivre de structure (Cu-Cr-Zr). Ces deux types de cuivre ont les mêmes propriétés élastiques et thermiques ([M99] et Annexe A), mais se distinguent par leurs propriétés plastiques. Le cuivre doux possède en effet une limite d'élasticité 3.5 fois moins grande que le Cu-Cr-Zr à température ambiante (cf. Annexe A).

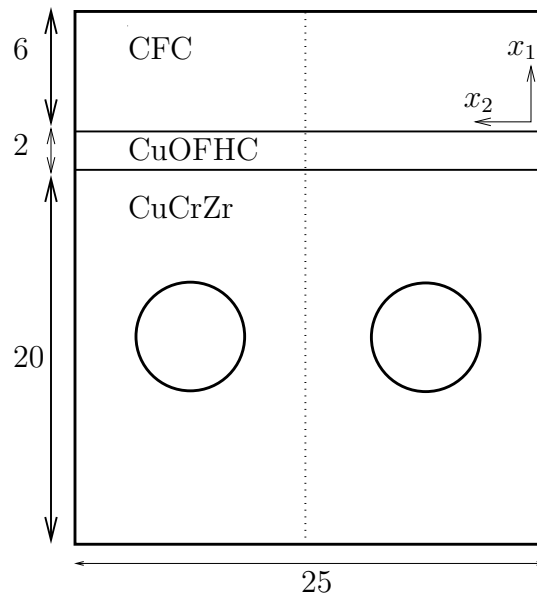
Les tuiles sont soumises à des contraintes thermiques, autant pendant leur élaboration qu'en fonctionnement. En effet, la phase finale de la fabrication est un refroidissement, de la température d'élaboration ( $470^\circ\text{C}$ ) à l'ambiante. Lors de la mise en service, le plancher est chauffé à environ  $120^\circ\text{C}$  par l'intermédiaire du canal délimité par le contour  $\Gamma_c$  (cf. Fig. 2.2), avant de subir le bombardement de neutrons, qui impose un flux thermique de l'ordre du  $\text{MW.m}^{-2}$  du CFC vers le cuivre de structure. Le point  $\mathcal{O}$ , situé à l'intersection du bord libre et de l'interface entre le cuivre doux et le CFC, est un lieu de concentration de contraintes, et l'objectif de ce chapitre est d'analyser la possibilité d'amorçage d'une fissure à cet endroit. On se limite ici à la phase de refroidissement et l'on suppose un état d'équilibre où la température est uniforme dans toute la structure, égale à la température ambiante. Il est à noter que l'analyse peut être menée pour les autres chargements



thermiques en conservant l'hypothèse de température localement uniforme. En effet, le champ de températures peut s'exprimer en une somme de puissances de  $r$ , dont le premier terme est une constante et le deuxième une puissance supérieure à 1 (c'est le vecteur flux de chaleur qui est singulier). Le champ asymptotique de températures au voisinage du point singulier  $\mathcal{O}$  est donc constant.



(a) Aiguille du LPT du réacteur Tore Supra



(b) Une tuile de cette aiguille

FIG. 2.1 – Aiguille et tuile du LPT de Tore Supra

## 2.1 Position du problème

Sur la structure représentée en Fig. 2.2 soumise au refroidissement  $\Theta$ , le champ de déplacements  $\underline{U}$  vérifie les équations suivantes :

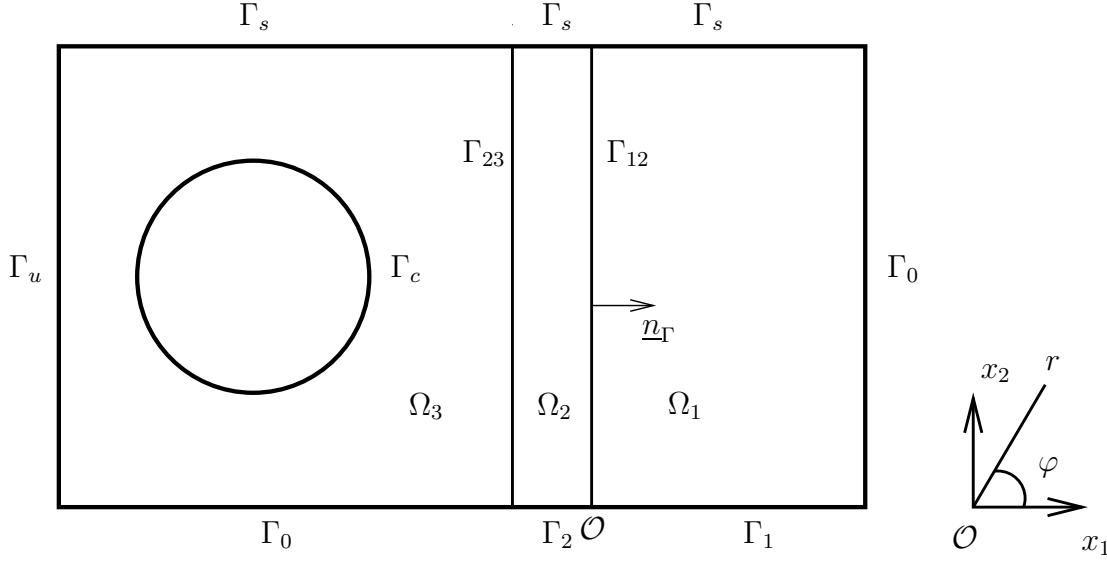


FIG. 2.2 – Assemblage CuCrZr-CuOFHC-CFC (moitié de la structure 2.1 (b) par symétrie par rapport à l'axe  $x_1 = 12.5$  mm).

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) = C_i : (\nabla_s \underline{U} - \underline{\underline{\varepsilon}}^a) \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2, 3 \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) = 0 \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2, 3 \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_0 \text{ pour } i = 1, 3 \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_c \\ \underline{U} = 0 \text{ sur } \Gamma_u \\ U_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_s \\ \sigma_{12} = 0 \text{ sur } \Gamma_s \\ \llbracket \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \cup \Gamma_{23} \\ \llbracket \underline{U} \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \cup \Gamma_{23} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

L'équation (2.1<sub>1</sub>) est la loi de comportement thermo-élastique. C'est la loi de

comportement retenue pour modéliser les trois matériaux, bien que les alliages de cuivre aient en réalité un comportement élasto-plastique. Cet aspect est pris en compte dans la section 2.3, mais on verra que l'on suppose les déformations plastiques comme constantes, ce qui nous permet d'utiliser là encore une loi de type « thermo-élastique ».

Le tenseur  $C_i$  désigne le tenseur d'élasticité du matériau  $i$  (cf. Fig. 2.2). L'indice  $a$  fait référence au champ de déformations anélastiques : dans la section 2.2, les déformations anélastiques sont d'origine thermique, tandis que dans la section 2.3, elles sont d'origine thermique et plastique.

L'équation (2.1<sub>2</sub>) est l'équation d'équilibre local.

Les équations (2.1<sub>3</sub>), (2.1<sub>4</sub>) et (2.1<sub>5</sub>) donnent les conditions de bords libres de contrainte,  $\underline{n}$  désignant la normale extérieure au bord considéré.

L'équation (2.1<sub>6</sub>) donne la condition de déplacement imposé.

Les équations (2.1<sub>7</sub>) et (2.1<sub>8</sub>) donnent les conditions de symétrie sur la face supérieure de la structure.

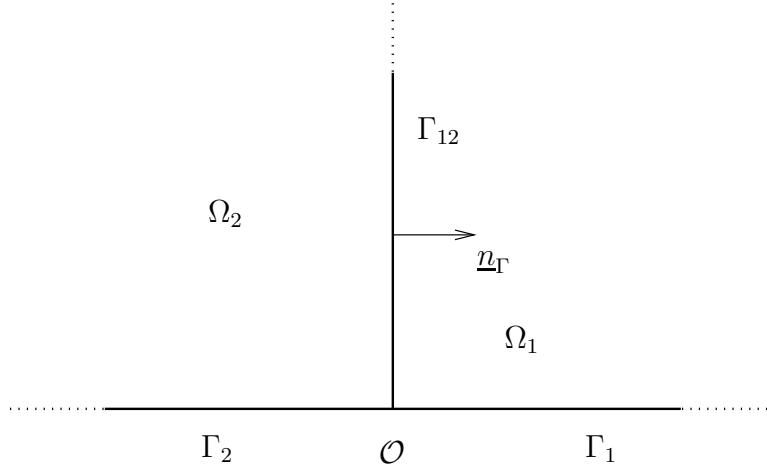
Les équations (2.1<sub>9</sub>) et (2.1<sub>10</sub>) traduisent l'hypothèse d'interface parfaite entre les matériaux (le symbole  $\llbracket \cdot \rrbracket$  représente la discontinuité de la variable  $\cdot$  à travers l'interface). La normale aux interfaces  $\underline{n}_\Gamma$  est arbitrairement choisie de même sens que  $\underline{x}_1$  (cf. Fig. 2.2).

On s'intéresse au problème local de l'amorçage de fissures à l'interface CuOFHC-CFC. On recherche la solution sous forme d'un développement de type Williams, à l'intersection de l'interface avec le bord libre, du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) = C_i : (\nabla_s \underline{U} - \underline{\underline{\varepsilon}}^a) \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) = 0 \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \llbracket \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \\ \llbracket \underline{U} \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Dans le système (2.2), le cuivre de structure est ignoré, ainsi que les conditions sur les frontières éloignées du point  $\mathcal{O}$  (cf. Fig. 2.2) ; on ne retient que la géométrie locale (cf. Fig. 2.3).

Ce système peut être mis sous la forme d'un problème élastique équivalent.

FIG. 2.3 – Géométrie locale autour du point singulier  $\mathcal{O}$ .

En effet, notons

$$\underline{\underline{\sigma}}^a = C_i : \underline{\underline{\varepsilon}}^a \quad (2.3)$$

Le système (2.2) se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{U}) = C_i : \nabla_s \underline{U} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{U}) = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^a \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{U}) \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}}^a \cdot \underline{n} \text{ sur } \Gamma_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \llbracket \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{U}) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \llbracket \underline{\underline{\sigma}}^a \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma \text{ sur } \Gamma_{12} \\ \llbracket \underline{U} \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

La notation  $\tilde{\sigma}$  est utilisée pour mettre en valeur la loi de comportement élastique.

La solution au voisinage de  $\mathcal{O}$  est cherchée sous la forme d'un développement de Williams :

$$\underline{U}(x_1, x_2) = \underline{U}(\mathcal{O}) + Kr^\lambda \underline{u}(\varphi) + \bar{\underline{U}}(x_1, x_2) + \dots \quad (2.5)$$

Le point  $\mathcal{O}$  est l'origine, i.e. l'intersection de l'interface CuOFHC-CFC et du bord libre;  $(x_1, x_2)$  et  $(r, \varphi)$  sont les coordonnées respectivement cartésiennes et polaires issues du point  $\mathcal{O}$  (cf. Fig. 2.2).

Le scalaire  $K$  est le facteur d'intensité des contraintes généralisé, qui dépend de la géométrie globale de la structure et du chargement appliqué sur celle-ci.

Le champ  $Kr^\lambda \underline{u}(\varphi)$  est le mode singulier de déplacements au voisinage de  $\mathcal{O}$ . L'exposant  $\lambda$  est l'exposant caractéristique de la singularité et le vecteur  $\underline{u}(\varphi)$  est le

champ de déplacement du mode singulier. Le champ  $r^\lambda \underline{u}(\varphi)$  vérifie les équations du système (2.6).

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\tilde{\sigma}}(r^\lambda \underline{u}(\varphi)) = C_i : \nabla_s(r^\lambda \underline{u}(\varphi)) = r^{\lambda-1} \underline{\tilde{s}}(\varphi) \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \underline{\tilde{\sigma}}(r^\lambda \underline{u}(\varphi)) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \underline{\tilde{\sigma}}(r^\lambda \underline{u}(\varphi)) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \llbracket \underline{\tilde{\sigma}}(r^\lambda \underline{u}(\varphi)) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \\ \llbracket r^\lambda \underline{u}(\varphi) \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Dans le cas d'un point singulier à l'interface d'un bimatériau, l'exposant  $\lambda$  et le vecteur  $\underline{u}$  dépendent non seulement de la géométrie locale, mais également des propriétés élastiques des matériaux. On les calcule à l'aide de la procédure décrite dans [LSP87] (Chapitre V p. 62 ; Chapitre VI p. 92).

Le calcul de l'exposant de singularité  $\lambda$  effectué avec les propriétés élastiques du CFC et du Cu-OFHC à la température ambiante (cf. Tab. 2.1) donne  $\lambda = 0.901$ . L'exposant de singularité est proche de 1, autrement dit la singularité n'est pas très forte. Le module de Young du cuivre varie avec la température (cf. Annexe A), mais ici on considère la structure à température ambiante.

	Cu	CFC
E (MPa)	132 000	22 000
$\nu$	0.3	0.2
$\lambda$ (MPa)	76 154	6 111
$\mu$ (MPa)	50 769	9 167
$\alpha(^{\circ}C)$	$16.7 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$

TAB. 2.1 – Propriétés élastiques et thermiques du cuivre doux et du CFC à la température ambiante.

Le champ  $\underline{\bar{U}}$  est un champ supplémentaire prenant en compte les conditions inhomogènes aux bords. Pour que le développement (2.6) ait un sens, il faut que les contraintes associées à  $\underline{\bar{U}}$  ne soient pas plus singulières que celles associées à  $r^\lambda \underline{u}(\varphi)$ , autrement dit il faut que  $\underline{\bar{U}}$  s'exprime en  $r^\mu \underline{u}(\varphi)$  avec  $\mu > \lambda$ . La forme de  $\underline{\bar{U}}$  dépend de l'expression des déformations anélastiques. Si l'on considère un comportement élastique du cuivre, les seules déformations résiduelles sont thermiques, elles sont

constantes dans chaque matériau, donc les contraintes associées ne sont pas singulières. Il en va de même si l'on considère le comportement élasto-plastique du cuivre, mais en approximant le champ de déformations plastiques par une constante (cf. section 2.3).

Le champ  $\bar{U}$  vérifie le système (2.7) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\bar{U}) = C_i : \nabla_s \bar{U} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\bar{U}) = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^a \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\bar{U}) \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}}^a \cdot \underline{n} \text{ sur } \Gamma_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \llbracket \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\bar{U}) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \llbracket \underline{\underline{\sigma}}^a \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma \text{ sur } \Gamma_{12} \\ \llbracket \bar{U} \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Le champ de contraintes associées à des déformations résiduelles constantes étant constant (par matériau), l'équation d'équilibre (2.7<sub>2</sub>) se simplifie, et se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\bar{U}) = C_i : \nabla_s \bar{U} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\bar{U}) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\bar{U}) \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}}^a \cdot \underline{n} \text{ sur } \Gamma_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \llbracket \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\bar{U}) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \llbracket \underline{\underline{\sigma}}^a \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma \text{ sur } \Gamma_{12} \\ \llbracket \bar{U} \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

## 2.2 Comportement élastique du cuivre - Contraintes résiduelles d'origine thermique

A la suite de cette présentation générale du problème, qui est valable pour tout type de déformations anélastiques, on cherche à obtenir la solution du problème faisant intervenir les déformations thermiques :

$$\varepsilon^a = \alpha_i \Theta \underline{\underline{I}} \quad (2.9)$$

où  $\alpha_i$  désigne le coefficient de dilatation thermique du matériau  $i$  et  $\underline{\underline{I}}$  le tenseur identité du deuxième ordre.

Introduisons le terme  $\beta_i$  tel que :

$$\beta_i \underline{\underline{I}} = C_i : \alpha_i \underline{\underline{I}} \quad (2.10)$$

Cette relation fournit l'expression de  $\beta_i$  suivante :

$$\beta_i = 2(\lambda_i + \mu_i)\alpha_i \quad (2.11)$$

où  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  désignent les coefficients de Lamé du matériau  $i$ .

*Remarque :* Les coefficients de Lamé sont bien sûr à distinguer des  $\lambda$  et  $\mu$  utilisés pour désigner les exposants du développement de Williams.

On rappelle l'expression des coefficients de Lamé en fonction du module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ , sous l'hypothèse de déformations planes :

$$\lambda_i = \frac{\nu_i E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \quad (2.12)$$

$$\mu_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)} \quad (2.13)$$

Le système (2.14) se réécrit, à l'aide de (2.10) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\tilde{\sigma}}(\bar{\underline{U}}) = C_i : \nabla_s \bar{\underline{U}} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \underline{\tilde{\sigma}}(\bar{\underline{U}}) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \underline{\tilde{\sigma}}(\bar{\underline{U}}) \cdot \underline{n} = \beta_i \Theta \underline{n} \text{ sur } \Gamma_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \llbracket \underline{\tilde{\sigma}}(\bar{\underline{U}}) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \llbracket \beta \rrbracket \Theta \underline{n}_\Gamma \text{ sur } \Gamma_{12} \\ \llbracket \bar{\underline{U}} \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

On cherche  $\bar{\underline{U}}$  sous la forme d'une puissance de  $r$  et la linéarité du problème nous autorise à factoriser ce champ par  $\Theta$  :

$$\bar{\underline{U}}(x_1, x_2) = \Theta r^\mu \underline{v}(\varphi) \quad (2.15)$$

On obtient donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\tilde{\sigma}}(r^\mu \underline{v}(\varphi)) = C_i : \nabla_s (r^\mu \underline{v}(\varphi)) = r^{\mu-1} \underline{t}(\varphi) \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \underline{\tilde{\sigma}}(r^\mu \underline{v}(\varphi)) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \underline{\tilde{\sigma}}(r^\mu \underline{v}(\varphi)) \cdot \underline{n} = \beta_i \underline{n} \text{ sur } \Gamma_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \llbracket \underline{\tilde{\sigma}}(r^\mu \underline{v}(\varphi)) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \llbracket \beta \rrbracket \underline{n}_\Gamma \text{ sur } \Gamma_{12} \\ \llbracket r^\mu \underline{v}(\varphi) \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Le champ  $r^\mu \underline{v}(\varphi)$  doit satisfaire des conditions de contraintes constantes aux bords (équation (2.16<sub>4</sub>)), ce qui impose  $\mu = 1$ . Or on vérifie numériquement que le système homogène (2.6) admet également des solutions en puissance 1 de  $r$ , i.e. 1 est un exposant caractéristique. On se trouve alors confronté à l'alternative de Fredholm ([LSP87] chapitre  $X$ , [R01]) : le système (2.16) admet une infinité de solutions. On donne en (2.17) une solution particulière de (2.16) (le domaine  $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$  correspond au CFC et le domaine  $\varphi \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$  au cuivre doux).

$$\begin{aligned}
v_r(\varphi) &= \begin{cases} \mathcal{K}_1 + \frac{1}{\mu_1} \mathcal{E} \cos(2\varphi) & \text{si } \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}] \\ \mathcal{K}_2 + \frac{1}{\mu_2} \mathcal{E} \cos(2\varphi) & \text{si } \varphi \in [\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases} \\
v_\varphi(\varphi) &= \begin{cases} -\frac{1}{\mu_1} \mathcal{E} \sin(2\varphi) & \text{si } \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}] \\ -\frac{1}{\mu_2} \mathcal{E} \sin(2\varphi) & \text{si } \varphi \in [\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases} \\
t_{rr}(\varphi) &= \begin{cases} 2(\lambda_1 + \mu_1) \mathcal{K}_1 + 2\mathcal{E} \cos(2\varphi) & \text{si } \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}] \\ 2(\lambda_2 + \mu_2) \mathcal{K}_2 + 2\mathcal{E} \cos(2\varphi) & \text{si } \varphi \in [\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases} \\
t_{\varphi\varphi}(\varphi) &= \begin{cases} 2(\lambda_1 + \mu_1) \mathcal{K}_1 - 2\mathcal{E} \cos(2\varphi) & \text{si } \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}] \\ 2(\lambda_2 + \mu_2) \mathcal{K}_2 - 2\mathcal{E} \cos(2\varphi) & \text{si } \varphi \in [\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases} \\
t_{r\varphi}(\varphi) &= -2\mathcal{E} \sin(2\varphi)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_2 + \mu_2} \\
\mathcal{K}_1 &= \frac{\alpha_2 - \mathcal{R}\alpha_1}{1 - \mathcal{R}} + \frac{1}{1 - \mathcal{R}} \left( \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) \mathcal{E} \\
\mathcal{K}_2 &= \frac{\alpha_2 - \mathcal{R}\alpha_1}{1 - \mathcal{R}} + \frac{\mathcal{R}}{1 - \mathcal{R}} \left( \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) \mathcal{E} \\
\mathcal{E} &= \left( -\frac{\lambda_1}{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)} + \frac{\lambda_2}{\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)} \right)^{-1} (\alpha_2 - \alpha_1)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

La solution peut être calculée numériquement à l'aide de la procédure décrite dans [LSP87] (Chapitre  $V$  p. 62 ; Chapitre  $VI$  p. 92), avec un exposant  $\mu$  fixé à 1.

Finalement, le champ de déplacements sur la structure  $\Omega_0$  à la suite du refroidissement  $\Theta$  s'écrit :

$$\underline{U}(x_1, x_2) = \underline{U}(\mathcal{O}) + \Theta K^\theta r^\lambda \underline{u}(\varphi) + \Theta r \underline{v}(\varphi) + \dots \tag{2.19}$$



*Calcul de  $K^\theta$* 

Le facteur  $K^\theta$  est le facteur d'intensité des contraintes généralisé correspondant à un échauffement de  $1^\circ\text{C}$ . Gardons à l'esprit que le problème est linéaire : soit  $\underline{U}^0$  le champ de déplacements correspondant à un échauffement de  $1^\circ\text{C}$ , la solution correspondant au chargement réel ( $\Theta = -450^\circ\text{C}$ ) est obtenue par simple multiplication de  $\underline{U}^0$  par  $\Theta$ .

On a donc :

$$\underline{U}^0(x_1, x_2) = \underline{U}^0(\mathcal{O}) + K^\theta r^\lambda \underline{u}(\varphi) + r\underline{v}(\varphi) + \dots \quad (2.20)$$

Par analogie avec le cas purement élastique (cf. partie I), on souhaiterait utiliser l'intégrale de contour  $\mathcal{H}$  définie en 2.8. L'indépendance de  $\mathcal{H}$  par rapport au chemin d'intégration est basée sur le fait que les champs qui interviennent dans son expression vérifient des conditions homogènes aux bords  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , ainsi qu'à l'interface  $\Gamma_{12}$ . Or on a vu que  $\underline{U}$ , donc  $\underline{U}^0$  également, vérifient des conditions inhomogènes sur ces bords et à l'interface (cf. système (2.4)). La relation (2.11) n'est donc pas valable dans le cas présent.

L'intégrale de contour  $\mathcal{H}$  peut cependant être utilisée ici. En effet on remarque que le champ  $r\underline{v}(\varphi)$  vérifie les mêmes conditions inhomogènes que  $\underline{U}$  et  $\underline{U}^0$  (cf. systèmes (2.4) et (2.14)). La différence des deux champs vérifie donc des conditions homogènes à 0 sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  et à l'interface  $\Gamma_{12}$ . La relation (2.11) devient donc, dans ce cas :

$$K^\theta = \frac{\mathcal{H}_\Gamma(\underline{U}^0 - r\underline{v}(\varphi), r^{-\lambda}\underline{u}^-(\varphi))}{\mathcal{H}_\Gamma(r^\lambda\underline{u}(\varphi), r^{-\lambda}\underline{u}^-(\varphi))} \quad (2.21)$$

Le champ de déplacements  $\underline{U}^0$  est calculé par éléments finis à l'aide du code MODULEF, par la résolution du système (2.1). Les propriétés élastiques et thermiques du cuivre doux et du CFC varient en fonction de la température (cf. Annexe A). En particulier, le module de Young du cuivre doux passe de 103000 MPa à  $500^\circ\text{C}$  à 132000 MPa à l'ambiante. Ici, pour simplifier, on a utilisé les valeurs de  $E$ ,  $\nu$  et  $\alpha$  à la température ambiante (cf. Tab. 2.1), ce qui a pour effet de surestimer les contraintes.

Le champ  $r\underline{v}(\varphi)$  est soustrait à la solution  $\underline{U}^0$  et le FICG  $K^\theta$  est calculé à l'aide de la relation (2.21). On trouve  $K^\theta \approx 2.08 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{1-\lambda} \cdot \text{K}^{-1}$ , pour un échauffement de  $1^\circ\text{C}$  (cf. Tab. 2.2). On déduit par linéarité (multiplication par  $\Theta$ ) qu'un échauffement a tendance à ouvrir la fissure, tandis qu'un refroidissement aura tendance à empêcher cette ouverture. La discussion est poursuivie dans la section suivante.

$\lambda$	0.901
$K^\theta$ (MPa. mm $^{1-\lambda}$ .K $^{-1}$ )	2.080
$\bar{\sigma}^\theta$ (MPa. K $^{-1}$ )	-1.936

TAB. 2.2 – Les valeurs de  $\lambda$ ,  $K^\theta$  et de  $\bar{\sigma}^\theta$ *Analyse de l'amorçage*

On s'intéresse au champ de contraintes local  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{U})$ , et plus particulièrement à sa composante de traction à l'interface.

D'après les équations (2.1<sub>1</sub>), (2.9) et (2.10),  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{U})$  s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) = C_i : \nabla_s \underline{U} - \beta_i \Theta \underline{I} + \dots \quad (2.22)$$

En utilisant le champ  $\underline{U}$  établi en (2.19), et avec les équations (2.6<sub>1</sub>) et (2.16<sub>1</sub>), le champ de contraintes (2.22) devient :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) = \Theta(K^\theta r^{\lambda-1} \underline{\underline{s}}(\varphi) + \underline{\underline{t}}(\varphi) - \beta_i \underline{I}) + \dots \quad (2.23)$$

La condition de rupture en contrainte fait intervenir la composante de traction  $\sigma_{11}$  du champ (2.23) à l'interface  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (cf. Fig. 2.2).

On a vu que le mode singulier est continu à travers l'interface (cf. eqn. (2.6<sub>4</sub>)) et est normalisé de manière à avoir une contrainte de traction unitaire en amont du point singulier sur le trajet anticipé de la fissure. On a donc :  $s_{\varphi\varphi}(\varphi = \frac{\pi}{2}) = 1$ . De plus, la discontinuité à l'interface du champ de contraintes  $\underline{\underline{t}}$  (donné en (2.17)) compense exactement la discontinuité des coefficients  $\beta$  (cf. eqn. (2.16<sub>4</sub>)).

On peut donc écrire la composante  $\sigma_{11}$ , continue à travers l'interface :

$$\sigma_{11}(r, \varphi = \frac{\pi}{2}) = \Theta(K^\theta r^{\lambda-1} + \bar{\sigma}^\theta) \quad (2.24)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^\theta &= t_{\varphi\varphi}(\varphi = \frac{\pi^-}{2}) - \beta_1 \\ &= t_{\varphi\varphi}(\varphi = \frac{\pi^+}{2}) - \beta_2 \\ &= 4\mathcal{E} \end{aligned} \quad (2.25)$$

L'angle  $\varphi = \frac{\pi^-}{2}$  désigne l'interface côté CFC et  $\varphi = \frac{\pi^+}{2}$  côté cuivre.

On trace en figure 2.4 la contrainte  $\sigma_{11}(r, \varphi = \frac{\pi}{2}) = \sigma_{11}(x_1 = 0, x_2)$ , donnée par (2.24), sur l'interface (le point 0 correspond au point singulier) pour un refroidisse-

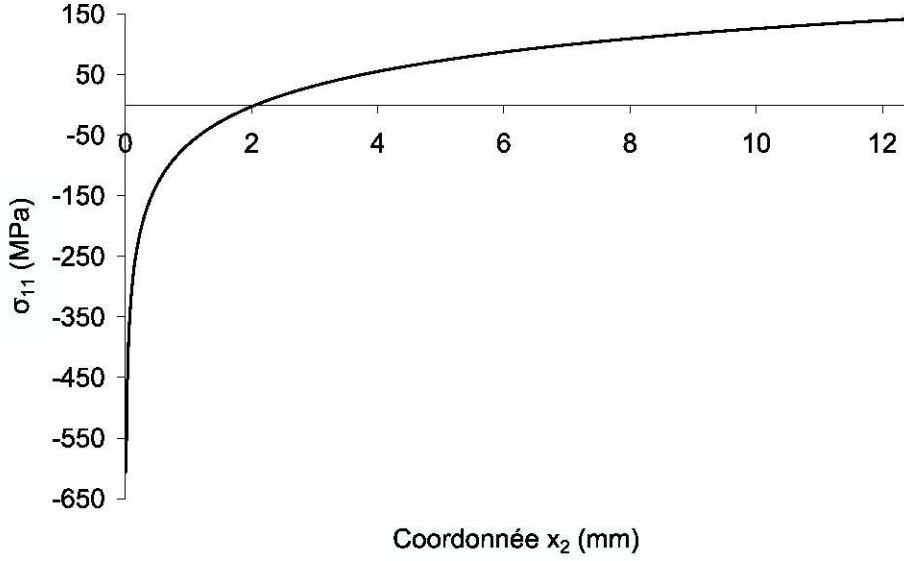


FIG. 2.4 – La contrainte  $\sigma_{11}$  à l'interface pour un refroidissement de  $\Theta = -450^\circ C$ .

ment de  $450^\circ C$ . La contrainte est tracée jusqu'à la valeur arbitraire de 3 mm, car on s'intéresse au comportement asymptotique.

Ce graphe est obtenu avec les valeurs de  $\lambda$ ,  $K^\Theta$  et  $\bar{\sigma}$  listées dans le tableau 2.2.

Dans le voisinage du point singulier, l'interface se trouve en compression. En effet, dans l'expression (2.24), le terme  $K^\Theta r^{\lambda-1}$  est prépondérant par rapport au terme constant  $\bar{\sigma}$  pour  $r \rightarrow 0$ , et comme il est multiplié par  $\Theta < 0$ , il est négatif. (Par linéarité, on en déduit que l'interface se trouverait en traction pour un échauffement, dans le voisinage du point singulier). Dans le cas qui nous intéresse, i.e. un refroidissement, la contrainte exercée tend à empêcher la création de fissure.

### *Bilan provisoire*

Le critère en contrainte  $\sigma_{11}(r, \varphi = \frac{\pi}{2}) \geq \sigma_c$  n'est donc pas vérifié pour un refroidissement de  $-450^\circ C$ . Mais gardons à l'esprit que nous avons supposé un comportement élastique du cuivre. Dans la section suivante 2.3, le comportement élastoplastique du cuivre est pris en compte.

## 2.3 Comportement élasto-plastique du cuivre - Contraintes résiduelles d'origine thermique et plastique

Le comportement élasto-plastique d'un des composants modifie le développement asymptotique de la solution au voisinage du point singulier. En effet, les exposants de singularité dépendent dans ce cas du coefficient d'écrouissage de la loi de comportement [RR68, H68, DR91, MN07]. Ces auteurs ont étudié plusieurs cas : Rice, Rosengren et Hutchinson [RR68, H68] ont étudié une fissure dans un matériau élasto-plastique, donnant la solution connue sous le nom de « HRR » ; Durban et Rand [DR91] ont donné la solution pour un solide en forme de coin pénétrant un solide visqueux ou un fluide newtonien ; Marsavina et Nurse [MN07] ont donné une solution numérique au problème du point singulier à l'interface d'un matériau élasto-plastique et d'un matériau élastique rigide. Dans tous ces cas, le champ asymptotique de contraintes établi à l'aide de la loi plastique (loi de Ramberg-Osgood [RO43]) est moins singulier que dans le cas élastique.

Dans le cadre du projet ITER, le comportement plastique du cuivre est pris en compte dans l'analyse de l'amorçage sous forme de contraintes résiduelles. Les déformations plastiques sont considérées comme constantes dans le cuivre au voisinage du point singulier. Les valeurs de ces constantes sont issues d'un calcul éléments finis effectué sous Cast3M.

Le système d'équations à résoudre est donné en (2.2). Ici le champ de déformations anélastiques  $\underline{\underline{\varepsilon}}^a$  comprend les déformations thermiques et plastiques dans le cuivre, et dans le CFC, les déformations thermiques :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^a = \begin{cases} \alpha_1 \Theta \underline{\underline{I}} & \text{dans le CFC} \\ \alpha_2 \Theta \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^p & \text{dans le cuivre} \end{cases} \quad (2.26)$$

Soit le champ  $\underline{\underline{\sigma}}^a$  défini par (cf. eqn. (2.3))

$$\underline{\underline{\sigma}}^a = C_i : \underline{\underline{\varepsilon}}^a, i = 1, 2 \quad (2.27)$$

Ce champ de contraintes est encore constant dans chaque matériau car les déformations thermiques sont constantes dans chaque matériau et on approxime les déformations plastiques par une constante au voisinage du point singulier, dans le cuivre.

On peut donc, ici encore, mettre le système sous la forme d'un problème élastique équivalent (cf. système 2.4). De nouveau, le choix de déformations anélastiques

constantes implique que l'équation d'équilibre ne contient pas de forces volumiques équivalentes. Le problème élastique équivalent s'écrit donc (cf. Fig. 2.3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}) = C_i : \nabla_s \underline{U} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}) \cdot \underline{n} = \underline{\sigma}^a \cdot \underline{n} \text{ sur } \Gamma_i, i = 1, 2 \\ \llbracket \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \llbracket \underline{\sigma}^a \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma \text{ sur } \Gamma_{12} \\ \llbracket \underline{U} \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Le problème (2.28) contient des conditions aux bords et à l'interface, explicitées en (2.29), faisant intervenir les composantes du champ de déformations plastiques  $\underline{\varepsilon}^p$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}) \cdot \underline{n} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 2(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_1\Theta \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_1 \\ \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}) \cdot \underline{n} = - \begin{pmatrix} 2\mu_2\varepsilon_{12}^p \\ 2(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_2\Theta + \lambda_2\varepsilon_{11}^p + (\lambda_2 + 2\mu_2)\varepsilon_{22}^p \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_2 \\ \llbracket \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \begin{pmatrix} C_0 \\ 2\mu_2\varepsilon_{12}^p \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_{12} \end{array} \right. \quad (2.29)$$

$$\text{avec } C_0 = (\lambda_2 + 2\mu_2)\varepsilon_{11}^p + \lambda_2\varepsilon_{22}^p + 2\Theta((\lambda_2 + \mu_2)\alpha_2 - (\lambda_1 + \mu_1)\alpha_1).$$

Le problème (2.28) pourrait être résolu tel quel, en utilisant les composantes des déformations plastiques calculées (voir plus loin pour le calcul de  $\underline{\varepsilon}^p$ ), mais l'on souhaite pouvoir faire varier ces composantes, ainsi que la variation de température  $\Theta$ , de manière à pouvoir généraliser l'étude au besoin. On ne peut pas, comme dans le chapitre 2, factoriser le problème par  $\Theta$  car les composantes  $\varepsilon_{ij}^p$  ne dépendent pas linéairement de  $\Theta$ . Le problème (2.28) est donc découpé en quatre problèmes, (2.31), (2.32), (2.33) et (2.34), faisant intervenir dans les conditions aux bords et à l'interface, seulement une des constantes, respectivement  $\Theta$ ,  $\varepsilon_{11}^p$ ,  $\varepsilon_{22}^p$  et  $\varepsilon_{12}^p$ .

On peut alors décomposer  $\underline{U}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \underline{U}(x_1, x_2) &= \underline{U}(\mathcal{O}) + \underline{U}^\theta(x_1, x_2) \\ &\quad + \underline{U}^{(11)}(x_1, x_2) + \underline{U}^{(22)}(x_1, x_2) + \underline{U}^{(12)}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.30)$$

avec  $\underline{U}^\theta$ ,  $\underline{U}^{(11)}$ ,  $\underline{U}^{(22)}$  et  $\underline{U}^{(12)}$  vérifiant respectivement les problèmes (2.31), (2.32), (2.33) et (2.34) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}^\theta) = C_i : \nabla_s \underline{U}^\theta \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}^\theta) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}^\theta) \cdot \underline{n} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 2(\lambda_1 + \mu_1) \alpha_1 \Theta \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_1 \\ \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}^\theta) \cdot \underline{n} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 2(\lambda_2 + \mu_2) \alpha_2 \Theta \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_2 \\ \llbracket \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}^\theta) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \begin{pmatrix} 2\Theta \left( (\lambda_2 + \mu_2) \alpha_2 - (\lambda_1 + \mu_1) \alpha_1 \right) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_{12} \\ \llbracket \underline{U}^\theta \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \end{array} \right. \quad (2.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}^{(11)}) = C_i : \nabla_s \underline{U}^{(11)} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}^{(11)}) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}^{(11)}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_1 \\ \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}^{(11)}) \cdot \underline{n} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \varepsilon_{11}^p \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_2 \\ \llbracket \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{U}^{(11)}) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \begin{pmatrix} (\lambda_2 + 2\mu_2) \varepsilon_{11}^p \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_{12} \\ \llbracket \underline{U}^{(11)} \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \end{array} \right. \quad (2.32)$$


---

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(U^{(22)}) = C_i : \nabla_s U^{(22)} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(U^{(22)}) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(U^{(22)}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_1 \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(U^{(22)}) \cdot \underline{n} = - \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda_2 + 2\mu_2)\varepsilon_{22}^p \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_2 \\ \llbracket \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(U^{(22)}) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \begin{pmatrix} \lambda_2 \varepsilon_{22}^p \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_{12} \\ \llbracket U^{(22)} \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \end{array} \right. \quad (2.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(U^{(12)}) = C_i : \nabla_s U^{(12)} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(U^{(12)}) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(U^{(12)}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_1 \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(U^{(12)}) \cdot \underline{n} = - \begin{pmatrix} 2\mu_2 \varepsilon_{12}^p \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_2 \\ \llbracket \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(U^{(12)}) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mu_2 \varepsilon_{12}^p \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_{12} \\ \llbracket U^{(12)} \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Chacune des fonctions  $\underline{U}^\theta$ ,  $\underline{U}^{(11)}$ ,  $\underline{U}^{(22)}$  et  $\underline{U}^{(12)}$  peut se mettre sous la forme d'un développement de Williams :

$$\underline{U}^\theta(x_1, x_2) = \Theta(K^\theta r^\lambda \underline{u}(\varphi) + \bar{U}^\theta(x_1, x_2)) + \dots \quad (2.35)$$

$$\underline{U}^{(ij)}(x_1, x_2) = \varepsilon_{ij}^p (K_{ij}^p r^\lambda \underline{u}(\varphi) + \bar{U}^{(ij)}(x_1, x_2)) + \dots \text{ pour } i, j = 1, 2 \quad (2.36)$$

*Remarque :* Les indices  $i$  et  $j$  des champs de déplacements  $\bar{U}^{(ij)}(x_1, x_2)$  font référence aux composantes du tenseur de déformations plastiques, il n'y a pas de sommation.

Le premier terme des développements (2.35) et (2.36) ( $r^\lambda \underline{u}(\varphi)$ ) vérifie des conditions homogènes à 0 aux bords et les conditions de continuité à l'interface (cf. système (2.6)). Le deuxième terme des développements (2.35) et (2.36) (respectivement  $\bar{U}^\theta$  et  $\bar{U}^{(ij)}$ ) prend en compte les conditions non homogènes aux bords et la discontinuité

du champ de contraintes à l'interface de chacun des problèmes (2.31), (2.32), (2.33) et (2.34).

Comme les conditions aux bords et à l'interface sont constantes, les fonctions  $\bar{U}^\theta$  et  $\bar{U}^{(ij)}$  avec  $i, j = 1, 2$  peuvent s'exprimer à l'aide d'une puissance 1 de  $r$  :

$$\begin{aligned}\bar{U}^\theta(x_1, x_2) &= r\underline{v}^\theta(\varphi) \\ \bar{U}^{(ij)}(x_1, x_2) &= r\underline{v}^{(ij)}(\varphi) \text{ pour } i, j = 1, 2\end{aligned}\tag{2.37}$$

De même que dans le cas où seules les déformations thermiques sont considérées, l'exposant 1 est également un exposant caractéristique du problème homogène. Les développements (2.35) et (2.36) contiennent donc également des solutions du type  $r\underline{v}(\varphi)$ , que l'on ne prend pas en compte ici.

On reconnaît en (2.31) le problème posé en (2.16). Une solution particulière à ce problème est donnée en (2.17).

Les champs de déplacements  $\underline{v}^{(ij)}$ , pour  $i, j = 1, 2$  sont solutions des problèmes  $\mathcal{P}^{(11)}$ ,  $\mathcal{P}^{(22)}$  et  $\mathcal{P}^{(12)}$  donnés en (2.38), (2.39) et (2.40).

$$\mathcal{P}^{(11)} \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(r\underline{v}^{(11)}(\varphi)) = C_i : \nabla_s(r\underline{v}^{(11)}(\varphi)) = \underline{\underline{t}}^{(11)}(\varphi) \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \underline{\underline{t}}^{(11)}(\varphi) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \underline{\underline{t}}^{(11)}(\varphi) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_1 \\ \underline{\underline{t}}^{(11)}(\varphi) \cdot \underline{n} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_2 \\ \llbracket \underline{\underline{t}}^{(11)}(\varphi) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \begin{pmatrix} \lambda_2 + 2\mu_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_{12} \\ \llbracket \underline{v}^{(11)}(\varphi) \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \end{array} \right. \tag{2.38}$$



$$\mathcal{P}^{(22)} \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(r\underline{v}^{(22)}(\varphi)) = C_i : \nabla_s(r\underline{v}^{(22)}(\varphi)) = \underline{\underline{t}}^{(22)}(\varphi) \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \underline{\underline{t}}^{(22)}(\varphi) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \underline{\underline{t}}^{(22)}(\varphi) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_1 \\ \underline{\underline{t}}^{(22)}(\varphi) \cdot \underline{n} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 + 2\mu_2 \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_2 \\ \llbracket \underline{\underline{t}}^{(22)}(\varphi) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_{12} \\ \llbracket \underline{v}^{(22)}(\varphi) \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \end{array} \right. \quad (2.39)$$

$$\mathcal{P}^{(12)} \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(r\underline{v}^{(12)}(\varphi)) = C_i : \nabla_s(r\underline{v}^{(12)}(\varphi)) = \underline{\underline{t}}^{(12)}(\varphi) \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \underline{\underline{t}}^{(12)}(\varphi) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_i \text{ pour } i = 1, 2 \\ \underline{\underline{t}}^{(12)}(\varphi) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_1 \\ \underline{\underline{t}}^{(12)}(\varphi) \cdot \underline{n} = - \begin{pmatrix} 2\mu_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_2 \\ \llbracket \underline{\underline{t}}^{(12)}(\varphi) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mu_2 \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma_{12} \\ \llbracket \underline{v}^{(12)}(\varphi) \rrbracket = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{12} \end{array} \right. \quad (2.40)$$

La résolution des problèmes  $\mathcal{P}^{(11)}$  et  $\mathcal{P}^{(12)}$  donne une solution nulle en déplacements et en contraintes dans le CFC. Les champs de déplacements et de contraintes dans le cuivre ( $\varphi \in [\pi; \frac{\pi}{2}]$ ) sont donnés en (2.41) pour le problème  $\mathcal{P}^{(11)}$  et en (2.42) pour le problème  $\mathcal{P}^{(12)}$ . Les solutions en déplacement sont données à un mouvement de corps rigide près.

$$\begin{cases} v_r^{(11)}(\varphi) &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2\varphi)) \\ v_\varphi^{(11)}(\varphi) &= -\frac{1}{2}\sin(2\varphi) \\ t_{rr}^{(11)}(\varphi) &= \lambda_2 + \mu_2(1 + \cos(2\varphi)) \\ t_{\varphi\varphi}^{(11)}(\varphi) &= \lambda_2 + \mu_2(1 - \cos(2\varphi)) \\ t_{r\varphi}^{(11)}(\varphi) &= \mu_2 \sin(2\varphi) \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\begin{cases} v_r^{(12)}(\varphi) &= \sin(2\varphi) \\ v_\varphi^{(12)}(\varphi) &= 1 + \cos(2\varphi) \\ t_{rr}^{(12)}(\varphi) &= 2\mu_2 \sin(2\varphi) \\ t_{\varphi\varphi}^{(12)}(\varphi) &= -2\mu_2 \sin(2\varphi) \\ t_{r\varphi}^{(12)}(\varphi) &= 2\mu_2 \cos(2\varphi) \end{cases} \quad (2.42)$$

Une solution particulière du problème  $\mathcal{P}^{(22)}$  est donnée en (2.43). Le CFC est caractérisé par  $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$  tandis que pour le cuivre,  $\varphi \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ .

$$\begin{aligned} v_r^{(22)}(\varphi) &= \begin{cases} \mathcal{K}\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} + \cos(2\varphi)\right) & \text{si } \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}] \\ \frac{1}{2}(1 - \cos(2\varphi)) + \mathcal{K}\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}\mathcal{R} + \mathcal{R}'\cos(2\varphi)\right) & \text{si } \varphi \in [\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases} \\ v_\varphi^{(22)}(\varphi) &= \begin{cases} -\mathcal{K}\sin(2\varphi) & \text{si } \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}] \\ \frac{1}{2} - \mathcal{R}'\mathcal{K}\sin(2\varphi) & \text{si } \varphi \in [\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases} \\ t_{rr}^{(22)}(\varphi) &= \begin{cases} 2\mu_1\mathcal{K}(1 + \cos(2\varphi)) & \text{si } \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}] \\ \lambda_2 + \mu_2(1 - \cos(2\varphi)) + 2\mu_1\mathcal{K}(1 + \cos(2\varphi)) & \text{si } \varphi \in [\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases} \\ t_{\varphi\varphi}^{(22)}(\varphi) &= \begin{cases} 2\mu_1\mathcal{K}(1 - \cos(2\varphi)) & \text{si } \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}] \\ \lambda_2 + \mu_2(1 + \cos(2\varphi)) + 2\mu_1\mathcal{K}(1 - \cos(2\varphi)) & \text{si } \varphi \in [\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases} \\ t_{r\varphi}^{(22)}(\varphi) &= \begin{cases} -2\mu_1\mathcal{K}\sin(2\varphi) & \text{si } \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}] \\ (\mu_2 - 2\mu_1\mathcal{K})\sin(2\varphi) & \text{si } \varphi \in [\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases} \end{aligned} \quad (2.43)$$

avec  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{K}$  donnés en (2.44)

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_2 + \mu_2} \\ \mathcal{R}' &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \\ \mathcal{K} &= \left( \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} (1 - \mathcal{R}) - (1 - \mathcal{R}') \right)^{-1}\end{aligned}\tag{2.44}$$

*Analyse de l'amorçage*

Etudions d'abord le champ de contraintes. Selon l'expression 2.1<sub>1</sub>, il s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) = C_m : \nabla_s \underline{U} - C_m : \underline{\underline{\varepsilon}}^a \quad \text{avec } m = 1, 2 \tag{2.45}$$

Avec le champ de déplacements (2.30), le champ de contraintes se réécrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) = C_m : \nabla_s \left( \underline{U}^\theta + \underline{U}^{(11)} + \underline{U}^{(22)} + \underline{U}^{(12)} \right) - C_m : \underline{\underline{\varepsilon}}^a \tag{2.46}$$

Or d'après les expressions (2.36) et (2.37), on a :

$$\begin{aligned}C_m : \nabla_s \underline{U}^\theta &= \Theta \left( K^\theta r^{\lambda-1} \underline{\underline{s}}(\varphi) + \underline{\underline{t}}^\theta(\varphi) \right) \\ C_m : \nabla_s \underline{U}^{(ij)} &= \varepsilon_{ij}^p \left( K_{ij}^p r^{\lambda-1} \underline{\underline{s}}(\varphi) + \underline{\underline{t}}^{(ij)}(\varphi) \right)\end{aligned}\tag{2.47}$$

Donc finalement, le champ de contraintes s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) = K r^{\lambda-1} \underline{\underline{s}}(\varphi) + \Theta \underline{\underline{t}}^\theta(\varphi) + \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij}^p \underline{\underline{t}}^{(ij)}(\varphi) - C_m : \underline{\underline{\varepsilon}}^a \tag{2.48}$$

avec

$$K = \Theta K^\theta + \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij}^p K_{ij}^p \tag{2.49}$$

On s'intéresse à la composante de traction à l'interface  $\sigma_{11}(r, \varphi = \frac{\pi}{2})$ . Cette composante est continue à travers l'interface, d'après l'équation (2.2<sub>4</sub>), et on le vérifie à l'aide des champs (2.17), (2.41), (2.43) et (2.42). En effet, écrivons les valeurs à gauche (dans le CFC) et à droite (dans le cuivre) de  $\sigma_{11}(r, \varphi = \frac{\pi}{2})$  :

Dans le CFC :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(r, \frac{\pi^-}{2}) &= Kr^{\lambda-1} s_{\varphi\varphi}(\frac{\pi^-}{2}) + \Theta t_{\varphi\varphi}^\theta(\frac{\pi^-}{2}) + \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij}^p t_{\varphi\varphi}^{(ij)}(\frac{\pi^-}{2}) \\
&\quad - 2(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_1\Theta \\
&= Kr^{\lambda-1} s_{\varphi\varphi}(\frac{\pi^-}{2}) + \Theta \left( t_{\varphi\varphi}^\theta(\frac{\pi^-}{2}) - 2(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_1 \right) \\
&\quad + \varepsilon_{11}^p t_{\varphi\varphi}^{(11)}(\frac{\pi^-}{2}) + \varepsilon_{22}^p t_{\varphi\varphi}^{(22)}(\frac{\pi^-}{2}) + \varepsilon_{12}^p t_{\varphi\varphi}^{(12)}(\frac{\pi^-}{2})
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Dans le cuivre :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(r, \frac{\pi^+}{2}) &= Kr^{\lambda-1} s_{\varphi\varphi}(\frac{\pi^+}{2}) + \Theta t_{\varphi\varphi}^\theta(\frac{\pi^+}{2}) + \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij}^p t_{\varphi\varphi}^{(ij)}(\frac{\pi^+}{2}) \\
&\quad - 2(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_2\Theta - (\lambda_2 + 2\mu_2)C_{11}^{(2)}\varepsilon_{11}^p - \lambda_2\varepsilon_{22}^p \\
&= Kr^{\lambda-1} s_{\varphi\varphi}(\frac{\pi^+}{2}) + \Theta \left( t_{\varphi\varphi}^\theta(\frac{\pi^+}{2}) - 2(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_2 \right) \\
&\quad + \varepsilon_{11}^p \left( t_{\varphi\varphi}^{(11)}(\frac{\pi^+}{2}) - (\lambda_1 + 2\mu_1) \right) + \varepsilon_{22}^p \left( t_{\varphi\varphi}^{(22)}(\frac{\pi^+}{2}) - \lambda_2 \right) \\
&\quad + \varepsilon_{12}^p t_{\varphi\varphi}^{(12)}(\frac{\pi^+}{2})
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Pour simplifier les expressions (2.50) et (2.51), considérons les faits suivants :

- le champ  $\underline{s}$  est continu à travers l'interface et de plus, est normalisé de manière à ce que :  $s_{\varphi\varphi}(\frac{\pi}{2}) = 1$  ;
- on a établi dans le chapitre 2 que

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^\theta &= t_{\varphi\varphi}^\theta(\frac{\pi^-}{2}) - 2(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_1 \\
&= t_{\varphi\varphi}^\theta(\frac{\pi^+}{2}) - 2(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_2 \\
&= 4\mathcal{E}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

où  $\mathcal{E}$  est définie en (2.18) ;

- on vérifie à l'aide de la solution (2.41) que

$$t_{\varphi\varphi}^{(11)}(\frac{\pi^-}{2}) = t_{\varphi\varphi}^{(11)}(\frac{\pi^+}{2}) - (\lambda_2 + 2\mu_2) = 0 \tag{2.53}$$

- on calcule à l'aide de la solution (2.43)

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^{(22)} &= t_{\varphi\varphi}^{(22)}(\frac{\pi^-}{2}) \\
&= t_{\varphi\varphi}^{(22)}(\frac{\pi^+}{2}) - \lambda_2 \\
&= 4\mu_2\mathcal{K}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

où  $\mathcal{K}$  est définie en (2.44) ;

– on vérifie à l'aide de la solution (2.42) que

$$t_{\varphi\varphi}^{(12)}\left(\frac{\pi^-}{2}\right) = t_{\varphi\varphi}^{(12)}\left(\frac{\pi^+}{2}\right) = 0 \quad (2.55)$$

Finalement, on peut écrire la composante de traction à l'interface :

$$\sigma_{11}(r, \varphi = \frac{\pi}{2}) = Kr^{\lambda-1} + \Theta\bar{\sigma}^\theta + \varepsilon_{22}^p\bar{\sigma}^{(22)} \quad (2.56)$$

avec  $\bar{\sigma}^\theta$  et  $\bar{\sigma}^{(22)}$  définis en (2.52) et (2.54).

Les valeurs numériques, obtenues avec les données matériau du tableau 2.1, sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\approx -9.68 \cdot 10^{-4} \\ \mathcal{K} &\approx -3.43 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Le calcul des FICG  $K^\theta$  et  $K_{ij}^p$ , recensés dans le tableau 2.3, est effectué à l'aide de l'intégrale  $\mathcal{H}$  (cf. eqn. (2.21)). On calcule les solutions correspondant à un échauffement unitaire  $1^\circ\text{C}$  ( $\bar{\underline{U}}_0^\theta$ ) et à des déformations plastiques unitaires  $\bar{\underline{U}}_0^{(ij)}$  telles que

$$\bar{\underline{U}}^\theta = \Theta\bar{\underline{U}}_0^\theta \quad (2.58)$$

$$\bar{\underline{U}}^{(ij)} = \varepsilon_{ij}^p\bar{\underline{U}}_0^{(ij)} \quad \text{pour } i, j = 1, 2 \quad (2.59)$$

Les FICG sont calculés avec ces solutions « unitaires ».

$$K^\theta = \frac{\mathcal{H}(\bar{\underline{U}}_0^\theta - r\underline{v}^{(th)}(\varphi), r^{-\lambda}\underline{u}^-(\varphi))}{\mathcal{H}(r^\lambda\underline{u}(\varphi), r^{-\lambda}\underline{u}^-(\varphi))} \quad (2.60)$$

$$K_{ij}^p = \frac{\mathcal{H}(\bar{\underline{U}}_0^{(ij)} - r\underline{v}^{(ij)}(\varphi), r^{-\lambda}\underline{u}^-(\varphi))}{\mathcal{H}(r^\lambda\underline{u}(\varphi), r^{-\lambda}\underline{u}^-(\varphi))} \quad (2.61)$$

$K^\theta$ (MPa.mm <sup>1-<math>\lambda</math></sup> .K <sup>-1</sup> )	$K^p$ (MPa.mm <sup>1-<math>\lambda</math></sup> )			$\bar{\sigma}^\theta$ (MPa.K <sup>-1</sup> )	$\bar{\sigma}^{(22)}$ (MPa)
	$K_{11}^p$	$K_{22}^p$	$K_{12}^p$		
2.08	50	123380	5000	-1.936	-125710

TAB. 2.3 – Valeurs de  $K$  et  $\bar{\sigma}$  pour le cas plastique.

On peut voir que  $K_{22}^p$  est très grand devant  $K_{11}^p$  et  $K_{12}^p$ . En supposant que les déformations plastiques sont à peu près du même ordre de grandeur, on peut donc conserver uniquement le terme  $\varepsilon_{22}^p K_{22}^p$  dans l'expression de  $K$  (cf. eqn. (2.49)) :

$$K = \Theta K^\theta + \varepsilon_{22}^p K_{22}^p \quad (2.62)$$

La composante de traction à l'interface s'écrit donc :

$$\sigma_{11}(r, \varphi = \frac{\pi}{2}) = \left( \Theta K^\theta + \varepsilon_{22}^p K_{22}^p \right) r^{\lambda-1} + \Theta \bar{\sigma}^\theta + \varepsilon_{22}^p \bar{\sigma}^{(22)} \quad (2.63)$$

Dans cette partie, l'analyse de l'amorçage est basé sur l'hypothèse d'une déformation  $\varepsilon_{22}^p$  constante. Mais contrairement au cas des déformations thermiques, leur amplitude ne peut pas être calculée de manière simple. On s'aide donc d'un calcul numérique par éléments finis pour avoir la distribution de la composante 22 des déformations plastiques.

Le calcul a été effectué sous Cast3M, en adoptant un modèle élastique (isotrope) pour le CFC et un modèle élasto-plastique à écrouissage cinématique linéaire pour le cuivre. Les propriétés mécaniques des matériaux sont extraites de la thèse de Moncel [M99]. Le module de Young  $E$ , le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ , la limite élastique  $\sigma_Y$  et le module d'écrouissage  $H$  des deux types de cuivre varient en fonction de la température (cf. Tab. 2.4). Dans la modélisation, on impose donc une variation linéaire de ces caractéristiques entre leurs valeurs à 500 °C (la plus proche de 470°C, la température initiale) et 20 °C (la valeur du module de Young à 500°C n'étant pas fournie, on a utilisé sa valeur à 400°C). De même, on fait varier linéairement le coefficient de dilatation thermique du CFC entre 500 et 20°C (cf. Tab. 2.5). Les propriétés élastiques du CFC sont indépendantes de la température (cf. Annexe A).

Température (°C)	20	200	400	500	600	800
E (MPa)	132 000	120 000	103 000		90 000	
$\nu$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
H (MPa)	1190.5	1041.7	875	729.2	500	312.5
$\alpha(10^{-6}/^\circ C)$	16.7	17.3	18.1	18.45	18.7	19.1
$\sigma_Y$ (MPa) - Cuivre OFHC	60	40	20	15	10	2
$\sigma_Y$ (MPa) - Cu-Cr-Zr	210	200	140	100	10	2

TAB. 2.4 – Propriétés élastiques, thermiques et plastiques des deux alliages de cuivre utilisés (seule la limite élastique diffère)

Température ( $^{\circ}C$ )	20	500	1000	1500
$\alpha$ ( $10^{-6}/^{\circ}C$ )	1.3	1.6	1.8	2.0

TAB. 2.5 – Valeur du coefficient de dilatation thermique du CFC.

Le résultat qui nous intéresse, à savoir la distribution de la déformation  $\varepsilon_{22}^p$  dans le cuivre le long de l'interface à la suite du refroidissement de  $-450^{\circ}C$ , est représenté en figure 2.5 (a). La figure 2.5 (b) montre un zoom au voisinage du point singulier, jusqu'à une distance 2 mm du point singulier  $\mathcal{O}$ . Les déformations plastiques sont calculées aux points de Gauss des éléments (P1), et sont reportées aux noeuds.

Pour les noeuds les plus proches du point singulier, les valeurs de  $\varepsilon_{22}^p$  sont très irrégulières. Pour les deux premiers noeuds, à respectivement 10  $\mu m$  et 20  $\mu m$ ,  $\varepsilon_{22}^p$  est négative, mais devient et reste positive ensuite (une seule valeur est négative, correspondant à  $x_2 = 40 \mu m$ ). Ces valeurs irrégulières au voisinage du point singulier nous empêchent de donner une valeur fiable de la déformation plastique à cet endroit. De plus, on voit également que la courbe oscille. Pour ces deux raisons, on choisit d'utiliser une valeur moyenne  $\bar{\varepsilon}$ . On représente en figure 2.6 la valeur de la déformation plastique moyenne  $\bar{\varepsilon}_{22}^p$  en fonction de la position sur l'interface. On voit que cette déformation moyenne se stabilise à environ 1 mm du point singulier, et vaut environ  $6 \cdot 10^{-3}$ . On retient donc cette valeur dans la modélisation.

Le critère en contrainte usuel porte sur la valeur de la contrainte

$$\sigma_{11}(r, \varphi = \frac{\pi}{2}) = \bar{\varepsilon}(r) \left( K_{22}^p r^{\lambda-1} + \bar{\sigma}^{(22)} \right) + \Theta \left( K^{\theta} r^{\lambda-1} + \bar{\sigma}^{\theta} \right) \quad (2.64)$$

Traçons donc le graphe de la fonction  $\sigma_{11}(r, \frac{\pi}{2}) = \sigma_{11}(x_1 = 0, x_2)$ . On obtient la courbe continue sur la figure 2.7. Pour comparaison, on a tracé en pointillés la contrainte de traction à l'interface dans le cas où le cuivre est considéré élastique, courbe donnée en Fig. 2.4.

On constate que l'interface se trouve en compression dans un proche voisinage du point singulier, comme dans le cas thermo-élastique pur. On voit cependant que les contraintes sont moins importantes en valeur absolue que dans le cas purement élastique : la plasticité du cuivre relaxe les contraintes. Dans les deux cas, l'interface se trouve en compression, ce qui empêche l'amorçage d'une fissure. Ces résultats confirment les observations expérimentales : les tuiles ne subissent pas de délaminage à la suite de l'élaboration.

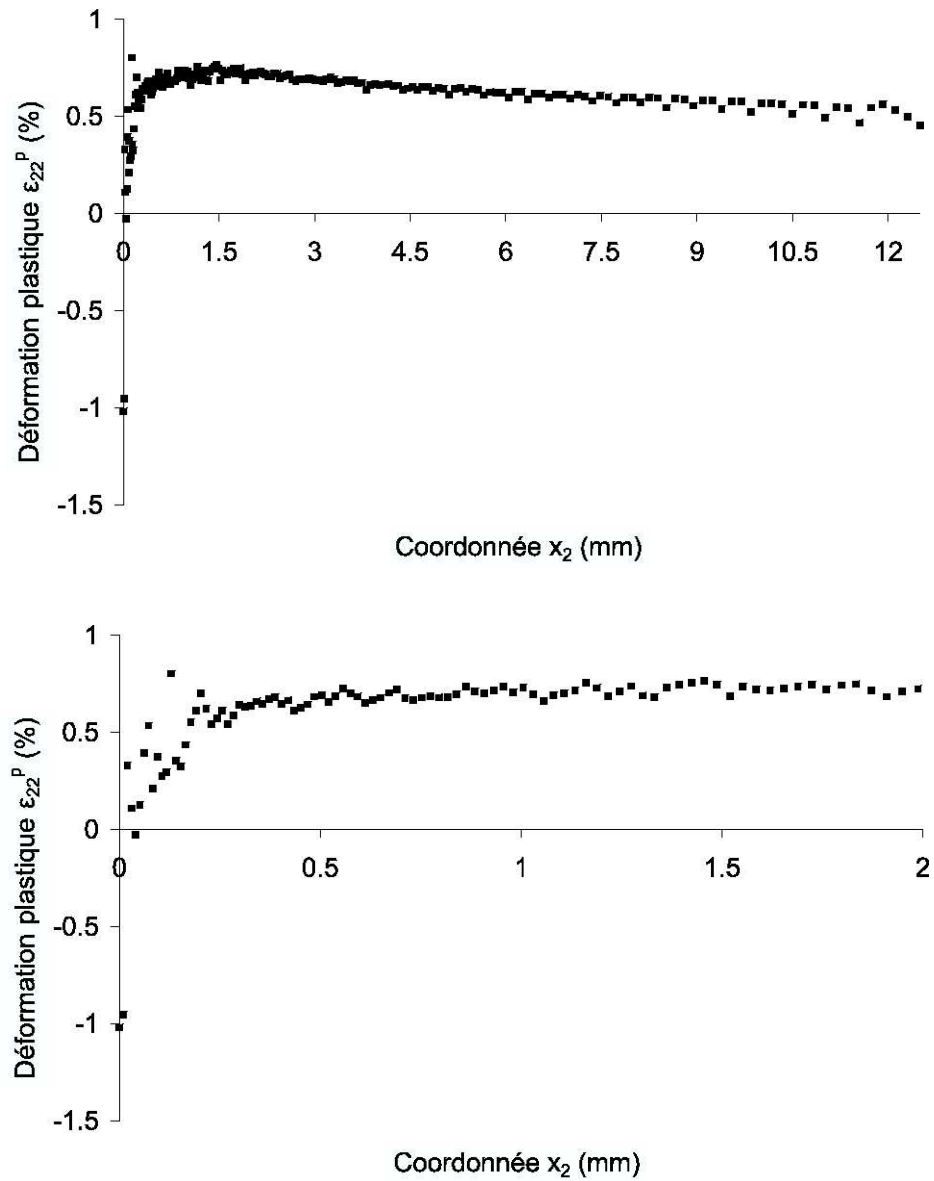


FIG. 2.5 – La déformation plastique  $\varepsilon_{22}^p$  à l'interface (a) - Zoom sur le voisinage du point singulier (b).



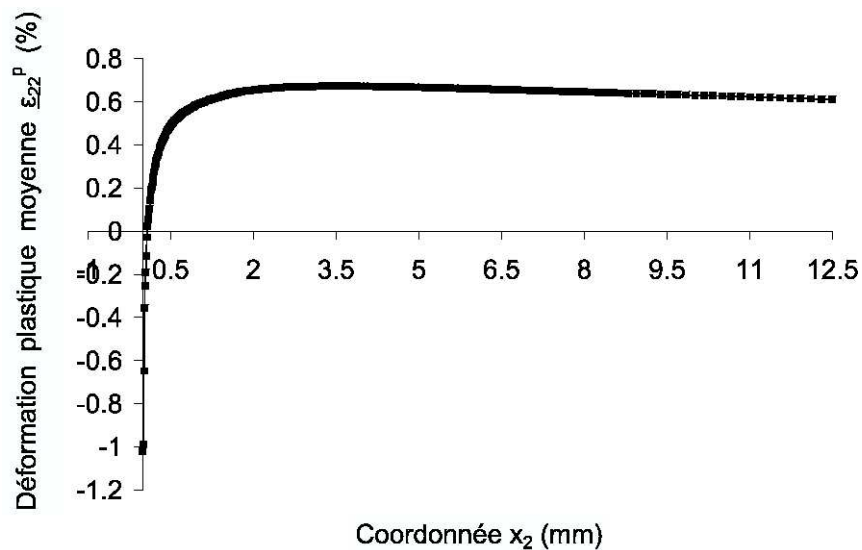


FIG. 2.6 – La déformation plastique moyenne  $\bar{\varepsilon}$  le long de l'interface

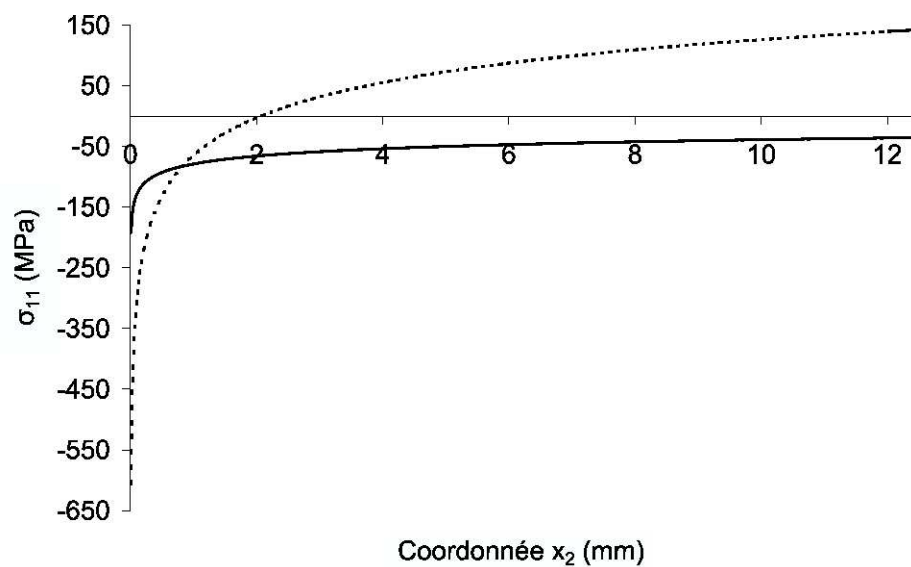


FIG. 2.7 – La contrainte de traction  $\sigma_{11}(0, x_2)$  le long de l'interface. Courbe continue : calcul élasto-plastique ; courbe pointillée : calcul élastique (cf. Fig. 2.4).



## Chapitre 3

# Bimatériau sous chargement thermo-mécanique

### 3.1 Introduction

The processing and the use of engineering assemblies made of dissimilar materials often results in the development of thermal residual stresses due to the mismatch in elastic and thermal properties. These residual stresses combined with mechanical loadings cause stress concentrations at non-smooth points of the interface between materials, what make them most likely fracture initiation sites. This issue impacts many structures of various sizes and in diverse industry fields. In the energy industry for instance, solid oxide fuel cell (SOFC) elements as well as coating tiles in nuclear magnetic chambers are subjected to very high temperatures in service (around  $800^{\circ}\text{C}$ ) and thus interface corners between components undergo severe stress concentrations. Electronic components are also concerned. In all these cases, it is of great importance to predict the critical loading that will onset a crack at interface corners.

These points are characterized in the usual linear models by singularities, i.e. local solutions with stresses (and heat flow if temperature changes are not uniform) increasing to infinity in the vicinity of the point ([AF97, IK97, W52]). The local displacement field can be written as a Williams' expansion ([W52]), thus the local stress field expands as the sum of a singular term scaled by a generalized stress intensity factor (GSIF)  $K$  and a smooth term proportional to the magnitude of the thermal loading ([QA98a, MFY93]). The GSIF  $K$  is the sum of a stress intensity factor scaling mechanical loadings  $K^m$  and a thermal stress intensity factor proportional to the thermal loading  $K^{\theta}$ . Many papers are dedicated to the computation of  $K^m$  and  $K^{\theta}$ , respectively [QA99, LD99, R90] and [QA98b, Y98, IK97]). In many

---

studies ([QA98a, AF97]) it is assumed that failure occurs as  $K$  reaches a critical value  $K_c$ , which is determined experimentally. Though such a failure criterion does not allow predictions in general cases since each new geometry requires new experiments to identify  $K_c$ .

Leguillon showed ([L02, LY03a]) that the combination of a Griffith-like condition and a maximum tensile stress criterion allows predicting the failure at interface corners of assemblies subjected to mechanical loadings. This onset criterion is also based on a critical value  $K_c$  of the GSIF, but here  $K_c$  is determined as a function of the interfacial tensile strength  $\sigma_c$  and fracture toughness  $\mathcal{G}_c$ , that are independent from the geometry, and of a geometrical coefficient  $\mathcal{A}$  that can be computed with a two-scale finite element model.

In this paper the analysis led in [L02] is extended to thermo-elastic problems through a specific example : specimens made of two aluminium substrates with a butt or scarf joint in between (see Fig. 3.1) are cooled down during fabrication, and are then subjected to a uniform uniaxial tension (see section 3.2). Experimental data and measures are taken from [QA98a]. The problem is simplified under some hypotheses on the response of the substrates (see section 3.3), the study is thus carried out on the adhesive layer alone, with appropriate displacements prescribed on the boundaries. Linear elastic fields are still singular ([LSP87, W52]). The study is carried out exclusively at the singular point  $\mathcal{O}$  that undergoes the stronger singularity, in agreement with the initiation sites observed in experiments (see Fig. 3.1). Thermal and mechanical loadings are treated separately according to the linearity principle (section 3.4). The thermal fields are here scaled directly by the change of temperature  $\Theta$ , with no attempt to evaluate directly the amount of thermal stresses like in [SL06, ZWL06, QA98a, QA98b, MFY93, RG93]. The GSIF's scaling the leading term of the William's expansion of each contribution is computed. This is done using a path-independent integral ([LSP87] (pp 121-128), [LD99]) but it must be pointed out that this integral is not path independent for displacement and stress fields resulting from thermal loadings. Thus an equivalent thermo-elastic problem is solved and its solution is shifted without altering the leading singular term, in order to allow the GSIF computation ([MFY93]). The criterion based both on an energetic and a stress conditions is applied using the thermo-mechanical fields (section 3.5). In section 3.6 predictions are compared with experimental measures given in [QA98a].

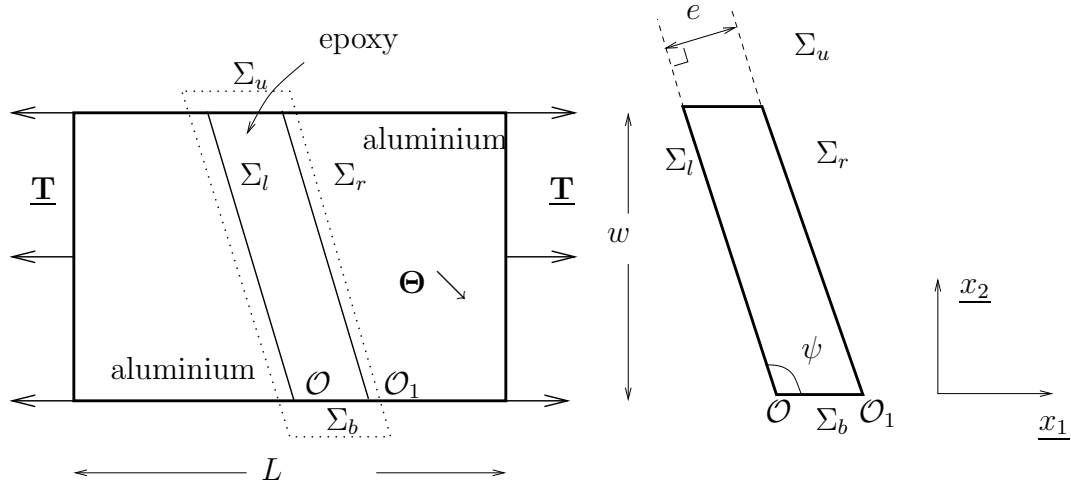


FIG. 3.1 – The assembly with the epoxy joint of thickness  $e$  (ranging from 0.64 mm to 2.1 mm) under uniaxial tension  $\underline{T}$  and change of temperature  $\Theta$ . The total length of the specimens is  $L = 135$  mm, their width is  $w = 30$  mm and their thickness is  $b = 10$  mm. The angle  $\psi$  takes the values  $90^\circ$ ,  $105^\circ$  or  $120^\circ$ .

### 3.2 The experiments by Qian and Akisanya

Tests have been carried out by Qian and Akisanya ([QA98a]) on assemblies made of two aluminium substrates bonded together with a thin F922 epoxy layer (see Fig. 3.1 left). Joints were cured at two different temperatures ( $120^\circ\text{C}$  and  $160^\circ\text{C}$ ) and applied on the surfaces to be bonded. Then the specimens were cooled down to room temperature and loaded with a remote uniaxial tension  $\underline{T}$ . Three geometrical configurations of the joint were tested, characterized by the angle  $\psi$  between  $\Sigma_b$  and  $\Sigma_l$  (see Fig. 3.1 right). For each configuration, different thicknesses  $e$  of the epoxy layer were tested.

### 3.3 The simplified thermo-elastic problem

Considering the substrates (aluminium alloy) as rigid compared to the epoxy resin (see Tab. 3.1) and assuming the substrates are free to contract (the constraint due to the epoxy is assumed negligible), the analysis is carried out in the adhesive layer alone under a plane strain assumption (the specimens are  $b = 10$  mm thick). All temperatures are assumed to be below the glass transition temperature of epoxy, that can be considered as an elastic material.

Let  $\underline{U}$  denote the displacement field in the epoxy layer. It can be expressed as

	aluminium	F922 epoxy
$E$ (MPa)	70 000	3 800
$\nu$	0.35	0.38
$\alpha$ (K <sup>-1</sup> )	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$5.8 \cdot 10^{-5}$
$\sigma_c$ (MPa)		45
$\mathcal{G}_c$ (J.m <sup>-2</sup> )		46

TAB. 3.1 – Young’s modulus ( $E$ ), Poisson’s ratio ( $\nu$ ) and coefficient of thermal expansion ( $\alpha$ ) of aluminium and epoxy ; tensile strength ( $\sigma_c$ ) and fracture toughness ( $\mathcal{G}_c$ ) of epoxy.

the sum of the mechanical contribution  $T\underline{V}^m$  and the thermal one  $\Theta\underline{V}^\theta$  :

$$\underline{U} = T\underline{V}^m + \Theta\underline{V}^\theta \quad (3.1)$$

The associated stress field is given by the following thermo-elastic constitutive law :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) = C : (\nabla_s \underline{U} - \alpha \Theta \underline{\underline{I}}) \quad (3.2)$$

where  $C$  is the elastic tensor and  $\alpha$  the coefficient of thermal expansion of the epoxy. The operator  $\nabla_s$  refers to the symmetric part of the gradient operator and  $\underline{\underline{I}}$  is the second-order identity tensor.

Using (3.1) in eqn. (3.2), the stress field writes :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) = T \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{V}^m) + \Theta (\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{V}^\theta) - \beta \underline{\underline{I}}) \quad (3.3)$$

with :

$$\beta = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \alpha \quad (3.4)$$

The notation  $\tilde{\sigma}$  is used to emphasize on the elastic constitutive law  $\tilde{\sigma}(\cdot) = C : \nabla_s(\cdot)$ .

The displacement fields  $\underline{V}^m$  and  $\underline{V}^\theta$  are thus solutions to the pure elastic problems (3.5) and (3.6) respectively :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{V}^m) = C : \nabla_s \underline{V}^m & \text{in epoxy} \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{V}^m) = \underline{0} & \text{in epoxy} \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{V}^m) \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{on } \Sigma_u \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{V}^m) \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{on } \Sigma_b \\ \underline{V}^m = \underline{U}_r^m & \text{on } \Sigma_r \\ \underline{V}^m = \underline{U}_l^m & \text{on } \Sigma_l \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(V^\theta) = C : \nabla_s V^\theta & \text{in epoxy} \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(V^\theta) = \underline{0} & \text{in epoxy} \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(V^\theta) \cdot \underline{n} = \beta \underline{n} & \text{on } \Sigma_u \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(V^\theta) \cdot \underline{n} = \beta \underline{n} & \text{on } \Sigma_b \\ V^\theta = U_r^\theta & \text{on } \Sigma_r \\ V^\theta = U_l^\theta & \text{on } \Sigma_l \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Eqns. (3.5<sub>1</sub>) and (3.6<sub>1</sub>) are elastic constitutive laws. Eqns. (3.5<sub>2</sub>) and (3.6<sub>2</sub>) are equilibrium conditions. Eqns. (3.5<sub>3</sub>)-(3.5<sub>4</sub>) and (3.6<sub>3</sub>)-(3.6<sub>4</sub>) are traction conditions on the edges  $\Sigma_u$  and  $\Sigma_b$  (see Fig. 3.1), the vector  $\underline{n}$  being the outward normal of the edge under consideration. Eqns. (3.5<sub>5</sub>)-(3.5<sub>6</sub>) and (3.6<sub>5</sub>)-(3.6<sub>6</sub>) are prescribed displacements derived from the remote uniaxial tension  $T$  applied on the aluminium substrates. They are rigid motions corresponding to the almost rigid displacements of the two aluminium parts during loading.

*Displacement boundary conditions for the mechanical problem*

They can be chosen as follows without any loss of generality (see Fig. 3.2) :

- the left-hand interface ( $\Sigma_l$ ) is clamped, thus  $\underline{U}_l^m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,
- the right-hand interface ( $\Sigma_r$ ) is subjected to a given displacement in the  $x_1$  direction and constrained in the  $x_2$  direction. We choose to prescribe a unit horizontal displacement. Thus  $\underline{U}_r^m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

*Displacement boundary conditions for the thermal problem*

For the sake of simplicity, it is assumed that the shrinkage of the layer is constrained

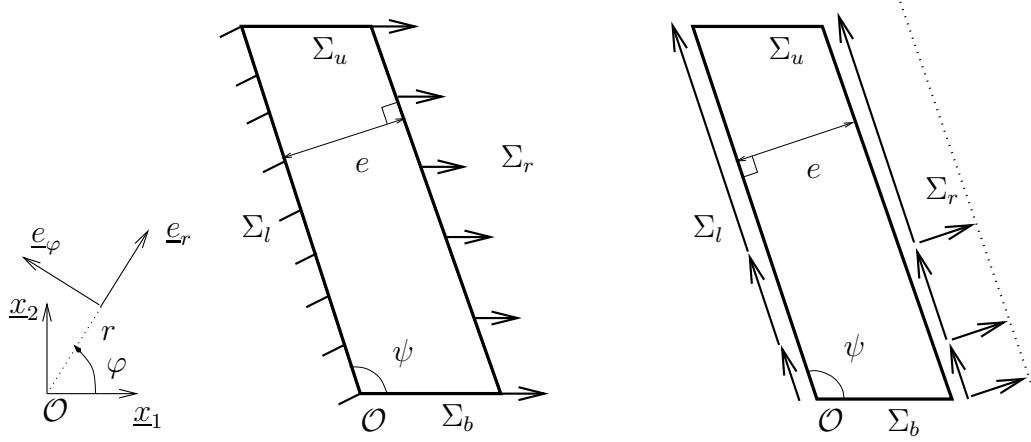


FIG. 3.2 – The epoxy layer subjected to the displacement boundary conditions in the simplified mechanical (left) and thermal (right) problems.

by the following conditions :

$$\begin{aligned}
 \sigma_\psi &= 0 && \text{in the layer} \\
 u_r &= \alpha_{alu} r && \text{on } \Sigma_r \text{ and } \Sigma_l, \\
 u_\psi &= 0 && \text{on } \Sigma_l
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Eqn. (3.7<sub>1</sub>) means that the epoxy layer is free to dilate in the direction perpendicular to the interfaces (in the  $\underline{e}_\psi$  direction, where  $\underline{e}_\psi = \underline{e}_\varphi(\varphi = \psi)$ , see Fig. 3.2).

Eqn. (3.7<sub>2</sub>) is the consequence of the perfect bonding interface condition,  $u_r$  being the displacement parallel to the interfaces (in the  $\underline{e}_r(\varphi = \psi)$  direction) and  $\alpha_{alu}$  the coefficient of thermal expansion of aluminium. The aluminium substrates are almost free to dilate.

Eqn. (3.7<sub>3</sub>) specifies that the edge  $\Sigma_l$  is arbitrarily constrained in the direction perpendicular to the interfaces, for practical purposes (without any loss of generality).

The displacement to prescribe in the  $\underline{e}_\psi$  direction along  $\Sigma_r$  is  $-\varepsilon_\psi e$ , where  $e$  is the layer thickness and  $\varepsilon_\psi$  is the strain component in the  $\underline{e}_\psi$  direction, i.e. the sum of the thermal strain ( $\alpha$ ) and of the elastic strain obtained with the hypotheses (3.7)  $\left(\frac{\nu}{1-\nu}(\alpha - \alpha_{alu})\right)$ . Eventually the strain component in the  $\underline{e}_\psi$  direction is :

$$\varepsilon_\psi = \frac{1}{1-\nu}\alpha - \frac{\nu}{1-\nu}\alpha_{alu} \tag{3.8}$$



Thus the imposed displacements write, in the local polar reference frame  $(\mathcal{O}, \underline{e}_r(\psi), \underline{e}_\varphi(\psi))$  :

$$- \underline{U}_l^\theta = \begin{pmatrix} \alpha_{alu} r \\ 0 \end{pmatrix} \text{ on } \Sigma_l, \quad - \underline{U}_r^\theta = \begin{pmatrix} \alpha_{alu} r \\ -\varepsilon_\psi e \end{pmatrix} \text{ on } \Sigma_r.$$

## 3.4 The displacement fields

### 3.4.1 The mechanical contribution

The displacement field  $\underline{V}^m$  writes locally around the singular point  $\mathcal{O}$  in a Williams' expansion :

$$\underline{V}^m(x_1, x_2) = \underline{V}^m(\mathcal{O}) + k^m r^\lambda \underline{u}(\varphi) + \dots, \quad (3.9)$$

where  $(x_1, x_2)$  and  $(r, \varphi)$  stand respectively for the Cartesian and polar coordinates with origin at the corner  $\mathcal{O}$  (see Fig. 3.2). The term  $\underline{V}^m(\mathcal{O})$  is the rigid translation of the origin  $\mathcal{O}$ . Considering the boundary condition (3.5<sub>6</sub>), we have  $\underline{V}^m(\mathcal{O}) = 0$ , thus :

$$\underline{V}^m(x_1, x_2) = k^m r^\lambda \underline{u}(\varphi) + \dots, \quad (3.10)$$

The field  $r^\lambda \underline{u}(\varphi)$  is solution to the following set of equations in the vicinity of  $\mathcal{O}$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\tilde{\sigma}}(r^\lambda \underline{u}(\varphi)) = C : \nabla_s (r^\lambda \underline{u}(\varphi)) = r^{\lambda-1} \underline{\tilde{s}}(\varphi) & \text{in epoxy} \\ \nabla \cdot \underline{\tilde{\sigma}}(r^\lambda \underline{u}(\varphi)) = \underline{0} & \text{in epoxy} \\ \underline{\tilde{\sigma}}(r^\lambda \underline{u}(\varphi)) \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{on } \Sigma_b \\ r^\lambda \underline{u}(\varphi) = \underline{U}_l^m & \text{on } \Sigma_l \end{array} \right. \quad (3.11)$$

The exponent  $\lambda$  is the order of the singularity, the vector  $\underline{u}(\varphi)$  is the associated mode. They depend both on elastic properties of the epoxy and of the local geometry, i.e. the scarf angle  $\psi$  (see Fig. 3.2). The scaling coefficient  $k^m$  is the so-called generalized stress intensity factor (GSIF), it is proportional to the magnitude of the applied loads and depends on the overall geometry, in particular on the layer thickness  $e$ . The omitted part of the expansion involves powers of  $r$  larger than or equal to 1, associated with non singular modes.

The mode  $r^\lambda \underline{u}(\varphi)$

The exponent  $\lambda$  can be obtained with analytical ([W52, DS97]) or numerical methods using the approach proposed by [LSP87] (pp 102-105). Its values for the singular points  $\mathcal{O}$  and  $\mathcal{O}_1$  (see Fig. 3.1 left) and for the three scarf angles  $\psi$  are listed in Tab. 3.2. For the three configurations, the exponent  $\lambda$  ranges between 0.5 to 1, thus associated stress and strain fields tend to infinity in the vicinity of the points. We see that the point  $\mathcal{O}_1$  is less singular than the point  $\mathcal{O}$  when the joint is inclined (for  $\psi = 90^\circ$ , the two points have equivalent roles), which gives a first argument for selecting the point  $\mathcal{O}$ . The order of singularity at point  $\mathcal{O}$  decreases with increasing scarf angle  $\psi$  ([W52]), i.e. the scarf configurations are more sensitive to crack initiations than the orthogonal one.

$\psi (^\circ)$	90	105	120
$\lambda$ (point $\mathcal{O}$ )	0.662	0.608	0.575
$\lambda$ (point $\mathcal{O}_1$ )	0.662	0.747	0.886

TAB. 3.2 – The order of singularity  $\lambda$  at points  $\mathcal{O}$  and  $\mathcal{O}_1$  for the three inclinations of the joint  $\psi$ .

The associated mode  $\underline{u}$  is normalized in such a way that the hoop stress acting on the clamped edge  $\Sigma_l$  is  $k^m r^{\lambda-1}$ . This condition is expressed by (cf. eqn. (3.11<sub>1</sub>))

$$s_{\varphi\varphi}(\varphi = \psi) = 1 \quad (3.12)$$

It must be pointed out that the leading term of the expansion (3.10) corresponds essentially to an opening mode. The shear stress component is at least 3 times smaller than the tensile component in the vicinity of the corner. Moreover, contrary to an intuitive idea, this feature is more and more pronounced when  $\psi$  increases (Tab. 3.3).

$\psi(^\circ)$	90	105	120
$s_{r\varphi}(\psi)$	-0.377	-0.244	-0.109

TAB. 3.3 – The shear stress component of the singular mode (the tensile component is normalized to 1) for the three inclinations of the joint  $\psi$ .

*The generalized stress intensity factor*

The displacement field  $\underline{V}^m$ , the mode  $r^\lambda \underline{u}(\varphi)$  associated with the singularity and its dual mode  $r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi)$  ([LSP87] (p. 91)) satisfy homogeneous conditions in the vicinity of the corner. Consequently, the following path-independent integral can be used in the computation of the GSIF  $k^m$  for the mechanical contribution ([LSP87] pp 121-128, [LD99]) :

$$k^m = \frac{\mathcal{H}(\underline{V}^m, r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi))}{\mathcal{H}(r^\lambda \underline{u}(\varphi), r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi))} \quad (3.13)$$

with :

$$\mathcal{H}(\underline{A}, \underline{B}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\tilde{\underline{\sigma}}(\underline{A}) \cdot \underline{n}_{\Gamma} \cdot \underline{B} - \tilde{\underline{\sigma}}(\underline{B}) \cdot \underline{n}_{\Gamma} \cdot \underline{A}) ds \quad (3.14)$$

Practically, the displacement field resulting from the mechanical loading  $\underline{V}^m$  is computed by finite elements, solving (3.5) and the GSIF  $k^m$  scaling  $\underline{V}^m$  is computed using relation (3.13), the contour  $\Gamma$  being any contour surrounding the corner and  $\underline{n}_{\Gamma}$  its normal pointing toward the corner.

But keep in mind that  $k^m$  scales a prescribed unit displacement problem. Since prescribed loadings hold in the actual problem, we need to know the relation between  $k^m$  and  $K^m$ . If the GSIF  $K^m$  scales the problem where a unit horizontal tension is prescribed on  $\Sigma_r$ , then the scalar  $TK^m$  will scale the actual problem for an applied tension  $T$ .

Let  $R_1$  be the  $x_1$ -component of the resultant force associated with the prescribed displacement on  $\Sigma_r$ . As  $k^m$  is proportional to  $R_1$ , then  $K^m$  is proportional to 1 GPa  $\times w$  ( $w$  being the width of the specimen (see Fig. 3.1)), which gives the relation :

$$K^m = \frac{wk^m}{R_1} \quad (3.15)$$

The GSIF  $K^m$  is expressed in  $\text{mm}^{(1-\lambda)}$  so that  $TK^m$  is expressed in  $\text{MPa} \cdot \text{mm}^{(1-\lambda)}$ . Practically, 12 structures were used in the computations, i.e. 4 structures for each scarf angle  $\psi$ . For a given angle  $\psi$ , the 4 different layer thicknesses used correspond to the thicknesses of the specimens tested by [QA98a] which were subjected to a change of temperature  $\Theta = -100^\circ \text{C}$  (see section 3.2). Computations show that  $k^m$  varies approximately like  $e^{-\lambda}$  and  $R_1$  like  $e^{-1}$ . Consequently, a good extrapolation law for  $K^m$  is given by :

$$K^m = K_0^m e^{1-\lambda} \quad (3.16)$$

with  $K_0^m$  given in Tab. 3.4.

$\psi$ (°)	90	105	120
$\lambda$	0.662	0.608	0.575
$K_0^m$	0.377	0.354	0.333
$K_0^\theta$ (K <sup>-1</sup> )	$-9.934 \cdot 10^{-5}$	$-6.151 \cdot 10^{-5}$	$-4.211 \cdot 10^{-5}$
$\bar{\sigma}$ (MPa.K <sup>-1</sup> )	$2.681 \cdot 10^{-1}$	$3.037 \cdot 10^{-1}$	$5.878 \cdot 10^{-1}$
$\mathcal{A}$ (MPa <sup>-1</sup> )	$4.87 \cdot 10^{-4}$	$5.30 \cdot 10^{-4}$	$5.46 \cdot 10^{-4}$

TAB. 3.4 – Numerical values of  $\lambda$ ,  $K_0^m$ ,  $K_0^\theta$ ,  $\bar{\sigma}$  and  $\mathcal{A}$ .

### 3.4.2 The thermal contribution

By analogy with the mechanical contribution (3.10), we would like to expand  $\underline{V}^\theta$  in the vicinity of the corner  $\mathcal{O}$  as a sum of terms such as the GSIF  $K^\theta$  associated with a unit change of temperature can be computed with expression (3.14) :

$$\underline{V}^\theta(x_1, x_2) = K^\theta r^\lambda \underline{u}(\varphi) + \dots, \quad (3.17)$$

but we see that the first-order expression (3.17) does not fulfil eqns. 3.6<sub>4</sub> and 3.6<sub>6</sub> in particular (remote boundary conditions on  $\Sigma_u$  and  $\Sigma_r$  are not taken into account in the search of the local expansion of  $\underline{V}^\theta$ ). So the local expression of  $\underline{V}^\theta$  must include other terms to satisfy the right boundary conditions on  $\Sigma_b$  and  $\Sigma_l$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{V}) = C : \nabla_s \underline{V} & \text{in epoxy} \\ \nabla \cdot \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{V}) = \underline{0} & \text{in epoxy} \\ \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{V}) \cdot \underline{n} = \beta \underline{n} & \text{on } \Sigma_b \\ \underline{V} = \underline{U}_l^\theta & \text{on } \Sigma_l \end{array} \right. \quad (3.18)$$

The set of equations (3.18) is consistent with a solution involving a unit exponent :

$$\underline{V}(x_1, x_2) = r \underline{v}(\varphi) \quad (3.19)$$

It is checked numerically that such a field, i.e. involving a unit exponent of  $r$ , is not a solution to system (3.11). Thus, according to ([LSP87] chapter X),  $\underline{V}$  is unique. It writes in polar coordinates

$$\underline{V}(x_1, x_2) = r \underline{v}(\varphi) = r \begin{pmatrix} v_r(\varphi) \\ v_\varphi(\varphi) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

with

$$\begin{cases} v_r(\varphi) &= A_\psi \left( -(\alpha - \alpha_{alu}) \cos(2\varphi) + \alpha \cos(2\psi) + \alpha_{alu}(1 - 2\nu) \right) \\ v_\varphi(\varphi) &= A_\psi (\alpha - \alpha_{alu}) \left( \sin(2\varphi) - \sin(2\psi) \right) \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\text{with } A_\psi = \frac{1}{\cos(2\psi) + 1 - 2\nu}.$$

In particular, it fulfils :

$$\begin{cases} t_{rr}(\varphi) &= A_\psi \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( -(1-2\nu)(\alpha - \alpha_{alu}) \cos(2\varphi) \right. \\ &\quad \left. + \alpha \cos(2\psi) + \alpha_{alu}(1 - 2\nu) \right) \\ t_{\varphi\varphi}(\varphi) &= A_\psi \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( (1-2\nu)(\alpha - \alpha_{alu}) \cos(2\varphi) \right. \\ &\quad \left. + \alpha \cos(2\psi) + \alpha_{alu}(1 - 2\nu) \right) \\ t_{r\varphi}(\varphi) &= A_\psi \frac{E}{1+\nu} (\alpha - \alpha_{alu}) \sin(2\varphi) \end{cases} \quad (3.22)$$

where  $t_{rr}$ ,  $t_{\varphi\varphi}$  and  $t_{r\varphi}$  are the polar components of the stress field (3.23) :

$$\underline{t}(\varphi) = C : \nabla_s(r\underline{v}(\varphi)) \quad (3.23)$$

Let us now define the shifted solution  $\hat{\underline{V}}$  by

$$\underline{V}^\theta = \hat{\underline{V}} + \underline{V} \quad (3.24)$$

It is clear from (3.6) and (3.18) that  $\hat{\underline{V}}$  is solution to an elastic problem with homogeneous conditions in the vicinity of the corner (i.e. without body or surface forces)

$$\begin{cases} \underline{\tilde{\sigma}}(\hat{\underline{V}}) = C : \nabla_s \hat{\underline{V}} \text{ in epoxy} \\ \nabla \cdot \underline{\tilde{\sigma}}(\hat{\underline{V}}) = \underline{0} \text{ in epoxy} \\ \underline{\tilde{\sigma}}(\hat{\underline{V}}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ on } \Sigma_b \\ \hat{\underline{V}} = \underline{0} \text{ on } \Sigma_l \\ + \text{ modified boundary conditions on } \Sigma_u \text{ and } \Sigma_r \end{cases} \quad (3.25)$$

As a consequence,  $\hat{\underline{V}}$  expands as (see eqn. (3.10))

$$\hat{\underline{V}}(x_1, x_2) = K^\theta r^\lambda \underline{u}(\varphi) + \dots, \quad (3.26)$$

Finally, the expansion of the thermo-elastic solution in powers of  $r$  comes out

$$\underline{V}^\theta(x_1, x_2) = K^\theta r^\lambda \underline{u}(\varphi) + r\underline{v}(\varphi) + \dots \quad (3.27)$$

The omitted terms are powers of  $r$  larger than 1 as in (3.10). The shift (3.24) does not alter the singular part of  $\underline{V}^\theta$ .

*The generalized stress intensity factor  $K^\theta$*

The GSIF  $K^\theta$  can be computed using  $\hat{\underline{V}}$  (satisfying homogeneous conditions in the vicinity of the corner, see (3.13)) :

$$K^\theta = \frac{\mathcal{H}(\hat{\underline{V}}, r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi))}{\mathcal{H}(r^\lambda \underline{u}(\varphi), r^{-\lambda} \underline{u}^-(\varphi))} \quad (3.28)$$

Practically, the displacement field  $\underline{V}^\theta$  resulting from the thermal loading is computed solving (3.6). Then,  $\underline{V}$  is removed from  $\underline{V}^\theta$  to get  $\hat{\underline{V}}$ . Finally, (3.28) is used to compute the GSIF  $K^\theta$ .

It is checked that the GSIF  $K^\theta$  varies in  $e^{1-\lambda}$ , as in the mechanical case :

$$K^\theta = K_0^\theta e^{1-\lambda} \quad (3.29)$$

with  $K_0^\theta$  given in Tab. 3.4.

## 3.5 The crack initiation analysis

In this part we assume that a short crack of length  $\ell$  initiates at point  $\mathcal{O}$  along the edge  $\Sigma_l$  (see Fig. 3.3). "Short crack" means that it is small compared to any dimension of the structure, in particular compared to the layer thickness. Following the reasoning proposed in [L02], it is assumed that the crack initiation is a brutal process, the crack jumps from 0 to a length  $\ell_0$ . This length is defined by both a stress argument and an energy criterion which is deduced from a two-scale analysis of the crack initiation.

### 3.5.1 The stress condition

On the one hand a necessary argument for fracture is that the tension must be above  $\sigma_c$ , the tensile strength of the interface, all along the anticipated crack path, i.e. from 0 to  $\ell$ . Using expressions (3.1), (3.10) and (3.27), the displacement field  $\underline{U}$  writes :

$$\underline{U}(x_1, x_2) = K r^\lambda \underline{u}(\varphi) + \Theta r \underline{v}(\varphi) + \dots \quad (3.30)$$

where

$$K = T K^m + \Theta K^\theta = e^{1-\lambda} (T K_0^m + \Theta K_0^\theta) \quad (3.31)$$

accounts for the mechanical and thermal loadings.

Thus, the associated stress field writes, using expressions (3.3), (3.11<sub>1</sub>) and (3.23) :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}) = Kr^{\lambda-1}\underline{\underline{s}}(\varphi) + \Theta(\underline{\underline{t}}(\varphi) - \beta\underline{\underline{I}}) + \dots \quad (3.32)$$

Then, according to the normalization (3.12), the stress condition leads to :

$$K\ell^{\lambda-1} \geq (\sigma_c - \Theta\bar{\sigma}) \quad (3.33)$$

where  $\bar{\sigma}$  is the traction component of the field  $(\underline{\underline{t}}(\varphi) - \beta\underline{\underline{I}})$ .

Since  $T$  and  $K^m$  are positive and  $\Theta$  and  $K^\theta$  negative (see Tab. 3.4), the stress intensity factor  $K$  is positive, which is consistent with an expected fracture zone in traction. As a consequence, eqn. (3.33) gives an upper bound of the admissible crack length, for a fixed value of  $K$ .

### 3.5.2 The energy criterion

The energy criterion is deduced from the energy balance between the initial state of the layer, prior to any crack onset, and the final one, with a short corner crack :

$$\delta K + \delta P + \mathcal{G}_c \delta S = 0 \quad (3.34)$$

where :

- $\delta K$  is the change in kinetic energy,
- $\delta P$  is the change in potential energy,
- $\mathcal{G}_c \delta S$  is the fracture energy consumed to create a crack of surface  $\delta S$  ( $\delta S = b\ell$ ,  $b$  being the thickness of the specimen and  $\ell$  the new crack length), with  $\mathcal{G}_c$  the fracture toughness of the interface.

Since the initial state is in equilibrium, the kinetic energy of the system can only increase :  $\delta K \geq 0$ . Thus, the equation (3.34) implies :

$$\delta P + \mathcal{G}_c \delta S \leq 0 \quad (3.35)$$

The crack initiates as the energy release rate

$$\mathcal{G} = -\frac{\delta P}{\delta S} \quad (3.36)$$

reaches its critical value  $\mathcal{G}_c$ .

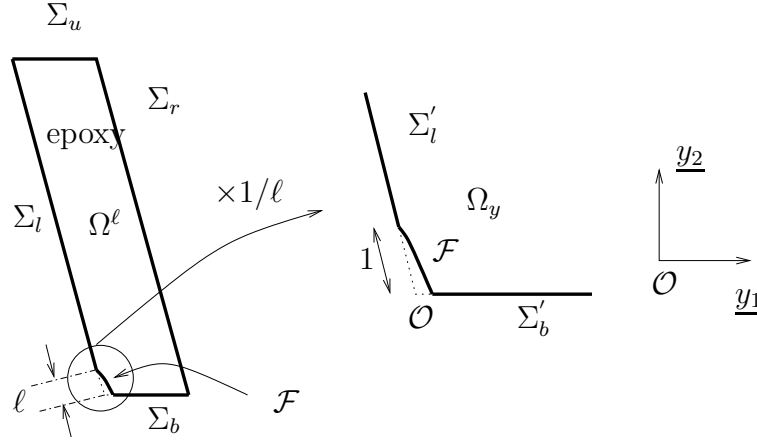


FIG. 3.3 – The actual and stretched corner micro-crack.

The change in potential energy writes as the difference of potential energies between the cracked structure  $P^\ell$  and the uncracked one  $P^0$  :

$$\delta P = P^\ell - P^0 \quad (3.37)$$

with  $P^\ell$  and  $P^0$  given by ([N97])

$$P^\ell = b \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega^\ell} C : \left( \nabla_s \underline{U}^\ell - \alpha \Theta \underline{I} \right) : \left( \nabla_s \underline{U}^\ell - \alpha \Theta \underline{I} \right) dx \right) \quad (3.38)$$

and

$$P^0 = b \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega^0} C : \left( \nabla_s \underline{U} - \alpha \Theta \underline{I} \right) : \left( \nabla_s \underline{U} - \alpha \Theta \underline{I} \right) dx \right) \quad (3.39)$$

where  $\Omega^\ell$  refers to the cracked domain and  $\Omega^0$  to the unperturbed one (without crack). The displacements fields  $\underline{U}^\ell$  and  $\underline{U}$  are the displacement fields on  $\Omega^\ell$  and  $\Omega^0$  respectively.

#### *Expansion of the perturbed displacement field $\underline{U}^\ell$ : the two-scale analysis*

Considering that the crack length is small in regard of the layer thickness  $e$ , the unknown displacement field  $\underline{U}^\ell$  is searched in the form :

$$\underline{U}^\ell(x_1, x_2) = \underline{U}(x_1, x_2) + f_1(\ell) \underline{U}^{(1)}(x_1, x_2) + \dots, \quad (3.40)$$

where  $f_1(\ell) \rightarrow 0$  as  $\ell \rightarrow 0$  and  $\underline{U}$  is the unperturbed displacement field given in (3.30).

The expansion of  $\underline{U}^\ell$  is obtained through the stretching of the actual domain so that the crack length equals to 1 (see Fig. 3.3). In the domain  $\Omega_y$ , the cartesian co-



ordinates write  $(y_1 = \frac{x_1}{\ell}, y_2 = \frac{x_2}{\ell})$  and the polar ones  $(\rho = \frac{r}{\ell}, \varphi)$ . The displacement field  $\underline{U}^\ell$  is solution to the following set of equations in this domain :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^\ell) = \frac{1}{\ell} C : \nabla_s^y \underline{U}^\ell - \beta \underline{\underline{I}} & \text{in epoxy} \\ \nabla^y \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^\ell) = \underline{0} & \text{in epoxy} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^\ell) \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{on } \Sigma'_b \\ \underline{U}^\ell = \underline{U}_l = \underline{U}_l^m + \underline{U}_l^\theta & \text{on } \Sigma'_l \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^\ell) \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{on } \mathcal{F} \\ \underline{U}^\ell \sim \underline{U} & \text{as } \rho \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (3.41)$$

Eqn. (3.41<sub>1</sub>) is the thermo-elastic constitutive law written in the coordinate system  $(y_1, y_2)$ . The operator  $\nabla_s^y$  refers to the symmetric part of the gradient operator with respect to the  $(y_j)$ 's,  $j = 1, 2$ . Eqn. (3.41<sub>2</sub>) is the equilibrium equation written in the coordinate system  $(y_1, y_2)$ . The operator  $\nabla^y$  refers to the divergence operator with respect to the  $(y_j)$ 's,  $j = 1, 2$ . Eqn. (3.41<sub>3</sub>) and (3.41<sub>4</sub>) are respectively stress free conditions and prescribed displacements. The notation ' reminds that  $\Sigma'_b$  and  $\Sigma'_l$  are parts of  $\Sigma_b$  and  $\Sigma_l$  respectively. Eqn. (3.41<sub>5</sub>) is the stress-free condition on the newly created crack of length 1 in the coordinate system  $(y_1, y_2)$ . Eqn. (3.41<sub>6</sub>) is the matching condition connecting both perturbed and unperturbed solutions : the perturbed solution behaves like the unperturbed solution far from the singular point, i.e. at infinity. The symbol  $\sim$  means "behaves like".

We assume that  $\underline{U}^\ell$  expands as :

$$\underline{U}^\ell(x_1, x_2) = \underline{U}^\ell(\ell y_1, \ell y_2) = F_1(\ell) \underline{W}^{(1)}(y_1, y_2) + F_2(\ell) \underline{W}^{(2)}(y_1, y_2) + \dots \quad (3.42)$$

The omitted part of the expansion (3.42) involves terms  $F_i(\ell) \underline{W}^{(i)}$  so that  $\frac{F_{i+1}(\ell)}{F_i(\ell)} \rightarrow 0$  as  $\ell \rightarrow 0$ .

The linearity of eqns. (3.41<sub>1</sub>) to (3.41<sub>6</sub>) and the matching condition (3.41<sub>6</sub>) give ([LSP87] (Lecture VIII), [L02, LL01]) :

$$F_1(\ell) = K \ell^\lambda \quad F_2(\ell) = \Theta \ell \quad (3.43)$$

Then  $\underline{W}^{(1)}$  and  $\underline{W}^{(2)}$  are solutions to (3.44) and (3.45) respectively :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla^y \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{W}^{(1)}) = \underline{0} & \text{in epoxy} \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{W}^{(1)}) = C : \nabla_s^y \underline{W}^{(1)} & \text{in epoxy} \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{W}^{(1)}) \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{on } \Sigma'_b \\ \underline{W}^{(1)} = \underline{U}_l^m & \text{on } \Sigma'_l \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{W}^{(1)}) \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{on } \mathcal{F} \\ \underline{W}^{(1)} \sim \rho^\lambda \underline{u}(\varphi) & \text{as } \rho \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (3.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla^y \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{W}^{(2)}) = \underline{0} & \text{in epoxy} \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{W}^{(2)}) = C : \nabla_s^y \underline{W}^{(2)} & \text{in epoxy} \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{W}^{(2)}) \cdot \underline{n} = \beta \underline{n} & \text{on } \Sigma'_b \\ \underline{W}^{(2)} = \underline{U}_l^\theta & \text{on } \Sigma'_l \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{W}^{(2)}) \cdot \underline{n} = \beta \underline{n} & \text{on } \mathcal{F} \\ \underline{W}^{(2)} \sim \rho \underline{v}(\varphi) & \text{as } \rho \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (3.45)$$

The existence of a solution to the system (3.44) can be easily proved provided the decomposition :

$$\begin{aligned} \underline{U}^\ell(x_1, x_2) &= \underline{U}^\ell(\ell y_1, \ell y_2) \\ &= K \ell^\lambda \left( \rho^\lambda \underline{u}(\varphi) + \bar{\underline{W}}^{(1)}(y_1, y_2) \right) + \Theta \ell \left( \rho \underline{v}(\varphi) + \bar{\underline{W}}^{(2)}(y_1, y_2) \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

where  $\bar{\underline{W}}^{(1)}$  and  $\bar{\underline{W}}^{(2)}$  are solutions to well-posed pure elastic problems directly derived from (3.44) and (3.45) and explicated in (3.47) and (3.48).

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla^y \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\bar{\underline{W}}^{(1)}) = \underline{0} & \text{in epoxy} \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\bar{\underline{W}}^{(1)}) = C : \nabla_s^y \bar{\underline{W}}^{(1)} & \text{in epoxy} \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\bar{\underline{W}}^{(1)}) \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{on } \Sigma'_b \\ \bar{\underline{W}}^{(1)} = \underline{0} & \text{on } \Sigma'_l \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\bar{\underline{W}}^{(1)}) \cdot \underline{n} = -\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\rho^\lambda \underline{u}(\varphi)) \cdot \underline{n} & \text{on } \mathcal{F} \\ \bar{\underline{W}}^{(1)} \sim \underline{0} & \text{as } \rho \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (3.47)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla^y \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{\bar{W}}^{(2)}) = \underline{0} & \text{in epoxy} \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{\bar{W}}^{(2)}) = C : \nabla_s^y \underline{\bar{W}}^{(2)} & \text{in epoxy} \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{\bar{W}}^{(2)}) \cdot \underline{n} = \underline{0} & \text{on } \Sigma'_b \\ \underline{\bar{W}}^{(2)} = \underline{0} & \text{on } \Sigma'_l \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{\bar{W}}^{(2)}) \cdot \underline{n} = -(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\rho v(\varphi)) - \beta \underline{I}) \cdot \underline{n} & \text{on } \mathcal{F} \\ \underline{\bar{W}}^{(2)} \sim \underline{0} & \text{as } \rho \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (3.48)$$

Numerically, the infinite domain is artificially bounded at a large distance of the origin by a contour  $\Gamma^\infty$  (large when compared to 1, i.e. the dimensionless crack size). The displacement fields are computed in the unknown functions  $\underline{\bar{W}}^{(1)}$  and  $\underline{\bar{W}}^{(2)}$ . Their behaviour at infinity are prescribed along the fictitious boundary  $\Gamma^\infty$  either as displacements

$$\underline{\bar{W}}(y_1, y_2) = \underline{0} \quad \text{on } \Gamma^\infty, \quad (3.49)$$

or as traction conditions

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\underline{\bar{W}}) \cdot \underline{n}^\infty = \underline{0} \quad \text{on } \Gamma^\infty, \quad (3.50)$$

where  $\underline{n}^\infty$  is the outward normal to  $\Gamma^\infty$ .

#### *The energy criterion*

Using expressions (3.30) and (3.46), the relation (3.37) writes :

$$\delta P = -b \left( K^2 \ell^{2\lambda} \mathcal{A} + K \Theta \ell^{\lambda+1} (\mathcal{B} + \mathcal{C}) + \Theta^2 \ell^2 \mathcal{D} \right) + \dots \quad (3.51)$$

with :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{H}(\underline{\bar{W}}^{(1)}, \rho^\lambda \underline{u}), \quad \mathcal{B} = \mathcal{H}(\underline{\bar{W}}^{(2)}, \rho^\lambda \underline{u}) \\ \mathcal{C} &= -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}} (\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\rho v(\varphi = \psi)) - \beta \underline{I}) \cdot \underline{n} \cdot \underline{\bar{W}}^{(1)} ds \\ \text{and } \mathcal{D} &= -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}} (\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\rho v(\varphi = \psi)) - \beta \underline{I}) \cdot \underline{n} \cdot \underline{\bar{W}}^{(2)} ds \end{aligned} \quad (3.52)$$

where the integral  $\mathcal{H}$  is defined in (3.14) ([L02, LL01]). The ... stand for further terms coming from extended Williams' expansions of  $\underline{U}$  and  $\underline{U}^\ell$ .

We choose to approximate the energy variation  $\delta P$  at the leading order with respect to  $\ell$  :

$$\delta P = -K^2 b \ell^{2\lambda} \mathcal{A} \quad (3.53)$$

The inequality (3.35) leads to the necessary condition for fracture

$$K^2 \ell^{2\lambda-1} \mathcal{A} \geq \mathcal{G}_c \quad (3.54)$$

Numerical computations show that  $\mathcal{A}$  is positive (see Tab. 3.4). Indeed the cracked specimen has less potential energy than the uncracked one, which leads to  $\delta P < 0$  using the definition (3.37). Thus eqn. (3.54) gives a lower bound for admissible crack lengths, for a fixed value of  $K$ .

### 3.5.3 The crack initiation criterion

The compatibility of the two bounds given in (3.33) and (3.54) provides the admissible crack length  $\ell_0$  ([L02]) :

$$\ell_0 = \frac{\mathcal{G}_c}{\mathcal{A}(\sigma_c - \Theta \bar{\sigma})^2} \quad (3.55)$$

It is important to notice that the fracture parameters  $\sigma_c$  and  $\mathcal{G}_c$  are theoretically those of the interface. But they are difficult to know precisely and besides are strongly related to the adhesion of the epoxy on a metal surface ([LC06]). Thus the fracture parameters used in the computations are those of the bulk epoxy (see Tab. 3.1).

The computation of  $\ell_0$  with the values of  $\mathcal{A}$  and  $\bar{\sigma}$  given in Tab. 3.4 shows that the crack length is close to 40  $\mu\text{m}$  for the three configurations of the joint, i.e. about 16 times smaller than the minimum layer thickness ( $e_{\min} = 0.64 \text{ mm}$ ) : the assumption that the crack length is small in regard of the layer thickness is valid.

For the length  $\ell_0$  defined in (3.55), both stress and energy conditions are fulfilled, which provides an onset criterion ([L02]) :

$$K \geq K_c \quad (3.56)$$

with

$$K_c = \left( \frac{\mathcal{G}_c}{\mathcal{A}} \right)^{1-\lambda} (\sigma_c - \Theta \bar{\sigma})^{2\lambda-1} \quad (3.57)$$

As a consequence the tension at failure  $T_f$  writes (see (3.31)) :

$$T_f = \frac{K_c - \Theta K^\theta}{K^m} = \frac{1}{K_0^m} \left( \frac{\mathcal{G}_c}{\mathcal{A}} \right)^{1-\lambda} (\sigma_c - \Theta \bar{\sigma})^{2\lambda-1} e^{\lambda-1} - \Theta \frac{K_0^\theta}{K_0^m} \quad (3.58)$$

The critical stress intensity factor depends, as for the pure mechanical cases, on  $\mathcal{G}_c$  and  $\sigma_c$ , but also on the magnitude of the cooling  $\Theta$ , multiplied by a tensile stress acting on the interface  $\bar{\sigma}$ .

$\psi$ (°)		90	105	120
$\Theta$ (°C)	-100	18.6	14.6	13.2
	-140	19.4	15.1	13.6
	0	16.0	13.1	11.7

TAB. 3.5 – The critical stress intensity factors  $K_c$  (MPa.mm<sup>1-λ</sup>) for different changes in temperature and configurations  $\psi$ .

For the forthcoming numerical comparisons, let us recall the onset criterion when residual thermal stresses are neglected, i.e. eqn. (3.56) with  $\Theta = 0^\circ C$  ([L02]) :

$$TK^m \geq K_c = \left(\frac{\mathcal{G}_c}{\mathcal{A}}\right)^{1-\lambda} (\sigma_c)^{2\lambda-1} \quad (3.59)$$

which gives the following expression for  $T_f$  :

$$T_f = \frac{K_c}{K^m} = \frac{1}{K_0^m} \left(\frac{G_c}{\mathcal{A}}\right)^{1-\lambda} (\sigma_c)^{2\lambda-1} e^{\lambda-1} \quad (3.60)$$

The values of  $K_c$  are listed in Tab. 3.5 for both changes of temperature  $\Theta = -100^\circ C$  and  $\Theta = -140^\circ C$  and in the case where the residual stresses are neglected  $\Theta = 0^\circ C$ .

#### *Remark*

It is to note that the critical stress intensity factors are expressed in MPa.mm<sup>1-λ</sup>, with  $\lambda$  the characteristic exponent of the singular point between a stress-free edge and a rigid edge. Thus they can not be compared with the critical GSIFs  $H_c$  obtained by Qian and Akisanya [QA98a] with a singular point at the interface between the aluminum substrate and the epoxy joint. The comparison between our results and the experimental measurements from Qian and Akisanya is made on the tensions at failure  $T_f$ , in the subsequent section.

## 3.6 Comparison with experimental results

Figures 3.4 and 3.5 give the estimated tensions at failure for  $\Theta = -100^\circ C$  and  $\Theta = -140^\circ C$  respectively. They are drawn using eqn. (3.58) (solid lines) with the values of  $\lambda$ ,  $K_0^m$ ,  $K_0^\theta$ ,  $\bar{\sigma}$  and  $\mathcal{A}$  given in Tab. 3.4. They also exhibit (dotted lines) the estimated tensions at failure when residual stresses are neglected ( $\Theta = 0^\circ C$ ). These estimated values are compared with experimental measurements taken from

[QA98a] (solid shapes). In Fig. 3.5 the additional dashed line is obtained with eqn. (3.58) but with different fracture parameters  $\sigma_c$  and  $\mathcal{G}_c$ . This is explained below.

Our model is in agreement with the experimental measurements : the tension at failure decreases with increasing layer thickness  $e$  and it decreases with increasing thermal loading  $|\Theta|$ . Figs. 3.4 and 3.5 show that the thermal residual stresses cannot be neglected, otherwise the tensions at failure are strongly overestimated. Nevertheless, one can note on Fig. 3.4 a slight overestimation of the experimental values. Besides for  $\Theta = -140^\circ C$  (see Fig. 3.5), the experimental  $T_f$  are by far lower than those given by our model for the three configurations.

As said in section 3.5.3 the fracture parameters  $\sigma_c$  and  $\mathcal{G}_c$  used in the computations are those of the bulk epoxy. The interfacial fracture parameters are likely smaller than them, otherwise cracks would not remain at the interface but deflect in the bulk. Thus our numerical results give an upper bound for failure tensions. The even higher overestimation for  $\Theta = -140^\circ C$  is probably due to a lower adhesion of the epoxy on the metal substrate at the curing temperature  $160^\circ C$ . In order to estimate the actual interfacial fracture parameters, the onset criterion (3.56) can be used as a relation between  $\mathcal{G}_c$  and  $\sigma_c$  :

$$\mathcal{G}_c = A \left( e^{1-\lambda} (T_f K_0^m + \Theta K_0^\theta) \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \left( \sigma_c - \Theta \bar{\sigma} \right)^{\frac{2\lambda-1}{1-\lambda}} \quad (3.61)$$

Using experimental data  $(e, T_f)$  in eqn. (3.61) provides a set of curves  $(\sigma_c, \mathcal{G}_c)$ . The average of these curves gives the probable fracture parameters of the interface at a given curing temperature (see Fig. 3.6). The curve  $(\sigma_c, \mathcal{G}_c)$  corresponding to a curing temperature  $120^\circ C$  is consistent with the good correlation between experiments and predictions : for  $\sigma_c = 45$  MPa, the fracture toughness is about  $38 \text{ J.m}^{-2}$ , i. e. slightly smaller than the value used in the computations. As expected, the probable fracture parameters for a curing temperature  $160^\circ C$  are much smaller than those of the bulk epoxy. In Fig. 3.5 the dashed lines show the tensions at failure computed with (3.58) and  $(\sigma_c, \mathcal{G}_c) = (45 \text{ MPa}, 19 \text{ J.m}^{-2})$ . Following our reasoning, each pair of data  $(\sigma_c, \mathcal{G}_c)$  given by the curve in Fig. 3.6 is valid but by trial and error it has been checked that the pair of fracture parameters  $(45 \text{ MPa}, 19 \text{ J.m}^{-2})$  is the best fit with the experimental measurements for each configuration.

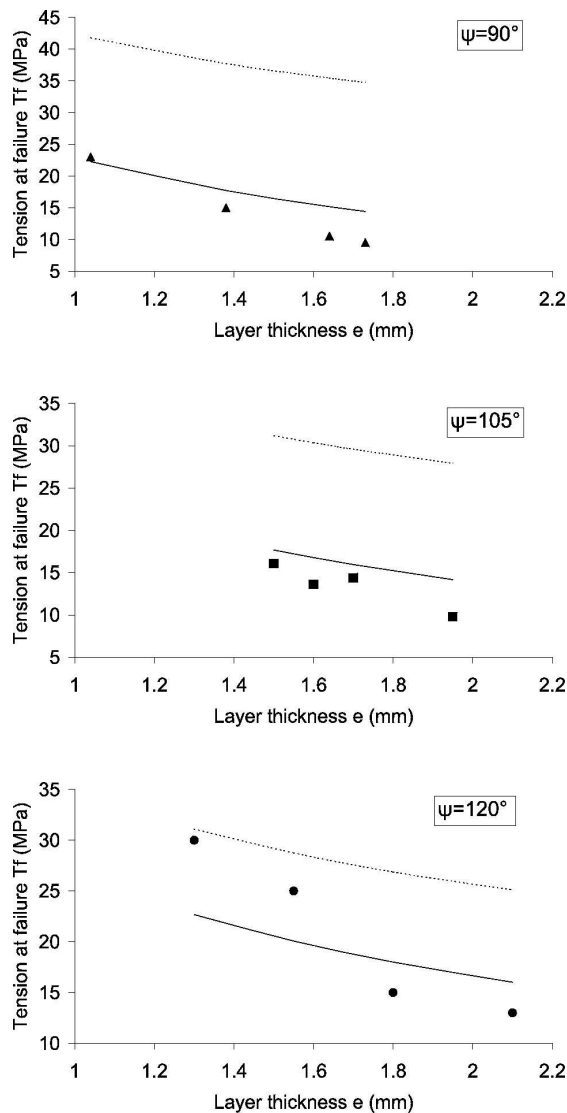


FIG. 3.4 – Failure tensions  $T_f$  vs. the layer thickness  $e$  for a change of temperature  $\Theta = -100^\circ\text{C}$  : experiments (solid triangles, squares and circles), predictions with (solid lines) and without residual stresses (dotted lines). The fracture parameters are  $\sigma_c = 45\text{ MPa}$  and  $\mathcal{G}_c = 46\text{ J.m}^{-2}$ .

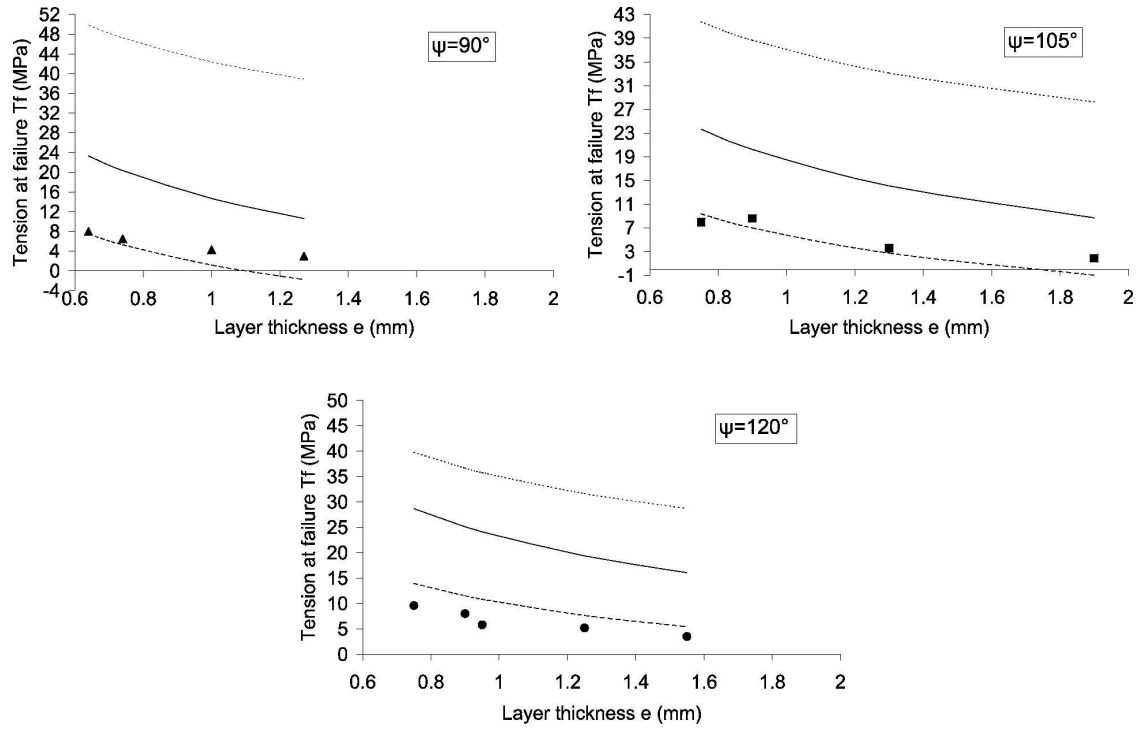


FIG. 3.5 – Failure tensions  $T_f$  vs. the layer thickness  $e$  for a change of temperature  $\Theta = -140^\circ C$ . Solid shapes : experimental measures; dotted lines : predictions without residual stresses and  $(\sigma_c, \mathcal{G}_c) = (45 \text{ MPa}, 46 \text{ J.m}^{-2})$ ; solid lines : predictions with residual stresses and  $(\sigma_c, \mathcal{G}_c) = (45 \text{ MPa}, 46 \text{ J.m}^{-2})$ ; dashed lines : predictions with residual stresses and  $(\sigma_c, \mathcal{G}_c) = (45 \text{ MPa}, 19 \text{ J.m}^{-2})$ .

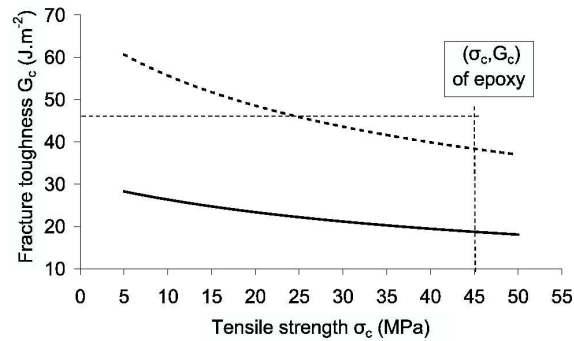


FIG. 3.6 – Estimation of the probable interfacial fracture parameters  $(\sigma_c, \mathcal{G}_c)$  for the curing temperatures  $120^\circ C$  (dashed line) and  $160^\circ C$  (solid line).



## 3.7 Conclusion

A method to predict quantitatively failure tensions in an adhesive joint undergoing thermal residual stresses is proposed in this work and compared with experimental measurements. The analysis is carried out in the joint alone, under some hypotheses on aluminium substrates response to the experimental loading ([QA98a]). The thermal residual stresses are taken into account in the generalized stress intensity factor  $K$  but they also modify its critical value  $K_c$ . As in [L02], two failure parameters of the interface are required to predict the failure initiation : the tensile strength  $\sigma_c$  and the fracture toughness  $\mathcal{G}_c$ . They are of course difficult to determine and are strongly related to the adhesion properties of the epoxy on a metal surface. The data corresponding to the bulk epoxy have been used herein, they probably overestimate those of the interface (otherwise failure would occur inside the epoxy). Using experimental data in our failure criterion allows estimating the probable interfacial fracture parameters. Tensions at failure predicted with adjusted failure parameters fit quite well with experimental measures for both curing temperatures and for the different inclinations of the joint.

---



## Conclusion

---



Le critère mixte porte sur une valeur critique du facteur d'intensité des contraintes généralisé (FICG)  $K$  mesurant l'intensité du champ singulier de contraintes. Le FICG critique, noté  $K_c$ , fait intervenir les propriétés de rupture du matériau (résistance en traction  $\sigma_c$  et densité d'énergie de rupture par unité de surface  $\mathcal{G}_c$ ). Il dépend également de la géométrie locale et des propriétés élastiques du matériau, à travers un coefficient géométrique  $\mathcal{A}$  calculé numériquement à l'aide d'une intégrale de contour.

Dans la partie I, on a établi le critère mixte d'amorçage dans le cas d'une entaille en V dans un matériau élastique homogène, soumise à un chargement symétrique. Cette partie a permis de vérifier la bonne corrélation entre le modèle et les essais expérimentaux. On a également montré que le critère d'amorçage de Leguillon prédit les mêmes chargements à rupture que le modèle de zone cohésive de Dugdale, dans le cas de l'entaille en V. Une des perspectives ouvertes par ce travail consiste à comparer plusieurs lois de zone cohésive [B59, N90, T03]. En particulier, il serait intéressant de voir si ces modèles prédisent un amorçage stable, puisqu'ils sont basés sur des lois adoucissantes, ou bien au contraire s'ils prédisent également un amorçage brutal, comme le critère mixte et le modèle de Dugdale.

La partie II traite de la prise en compte des contraintes résiduelles thermiques dans le critère d'amorçage. Celles-ci interviennent à la fois dans le critère en énergie et dans le critère en contrainte comme conséquence d'un terme supplémentaire  $r\underline{v}(\varphi)$  dans le développement de Williams des champs de déplacements perturbé et non perturbé. Ce terme supplémentaire joue un rôle important dans le calcul du facteur d'intensité  $K^\theta$ . En effet, en présence de contraintes résiduelles, l'intégrale de contour devient dépendante du chemin d'intégration choisi. L'ajout du terme supplémentaire, vérifiant les conditions inhomogènes induites par les contraintes résiduelles, permet tout de même d'utiliser l'intégrale  $\mathcal{H}$ , mais sur un champ modifié. La valeur de la composante de traction à l'interface du champ de contraintes associé à  $r\underline{v}(\varphi)$  joue un rôle important : dans le critère en contrainte, elle élève ou diminue la résistance en traction  $\sigma_c$  ; elle intervient dans le calcul de certains termes (non dominants) du taux de restitution de l'énergie. Le terme  $r\underline{v}(\varphi)$  dépend des propriétés élastiques et thermiques (coefficient de dilatation thermique) des matériaux en présence.

Le critère d'amorçage modifié prenant en compte les contraintes résiduelles permet de rendre compte de manière satisfaisante des résultats expérimentaux (cf chapitre 3). Ainsi, il peut également servir de base à une évaluation des paramètres de rupture de l'interface. En effet, si les chargements à rupture expérimentaux  $T$  sont

connus, l'inversion du critère  $K(T) = K_c(\sigma_c, \mathcal{G}_c)$  permet de déterminer la résistance en traction  $\sigma_c$  et la ténacité  $\mathcal{G}_c$  interfaciales, qui sont des quantités difficiles à mesurer. Ce calcul inverse est un outil prometteur pour la détermination des propriétés de rupture d'une interface quand celles-ci sont inaccessibles aux mesures.

Les développements asymptotiques au premier ordre donnent des résultats satisfaisants, mais il serait intéressant d'étudier la prise en compte des termes d'ordre supérieur, qui peuvent conduire à une perte de monotonie du taux de restitution de l'énergie  $-\frac{\delta P}{\delta \ell}$ . Sur la base du travail de Martin et al. [ML04, PM07], on peut supposer que, dans certains cas, il n'existe pas forcément de chargement critique tel que les deux conditions, en énergie et en contrainte, soient remplies simultanément : la rupture est conditionnée par l'un ou l'autre critère, le second étant trivialement vérifié.

Les contraintes résiduelles dues à la plasticité d'un des composants d'un biomatériau peuvent être prises en compte de la même manière que les contraintes résiduelles d'origine thermique, à condition de les supposer constantes au voisinage du point singulier (cf. partie II, chapitre 2, section 2.3). Dans le cadre de cette approximation, les calculs effectués sur la structure du réacteur TORE SUPRA sont cohérents avec les observations expérimentales : le refroidissement de  $450^\circ\text{C}$  n'est pas suffisant pour provoquer le délaminage des tuiles. La plasticité du cuivre a pour effet de relaxer la contrainte de compression agissant sur l'interface, sans toutefois modifier son signe. Dans ce cas précis, l'utilisation du critère en contrainte est suffisante pour conclure sur l'absence d'amorçage, avec ou sans prise en compte du comportement plastique du cuivre. On peut cependant enrichir l'analyse en modélisant le comportement du cuivre par une loi de Ramberg-Osgood [RO43]. Sur la base des travaux effectués pour des configurations diverses [RR68, H68, DR91, SA91, SA93, MN07], on peut supposer que le champ asymptotique des contraintes sera moins singulier que le champ élastique, ce qui rejoindrait la conclusion que nous avons tirée à partir de l'hypothèse de déformations plastiques constantes.

---

# Bibliographie

---





---

# Bibliographie

- [AF97] A. R. Akisanya, N. A. Fleck, Interfacial cracking from the free-edge of a long bi-material strip, *Int. J. Solids Struct.*, **34** n°13, pp 1645-1665, 1997.
- [AC01] G. Alfano, M. A. Crisfield, Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites : mechanical and computational issues, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **50**, pp 1701-1736, 2001.
- [AL92] O. Allix, P. Ladevèze, Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination, *Composite Structures*, **22**, pp 235-242, 1992.
- [C89] A. Carpinteri, Decrease of apparent tensile and bending strength with specimen size : two different explanations based on fracture mechanis, *Int. J. Solids Struct.*, **25** n°4, pp 407-429, 1989.
- [C86] H. Chai, On the correlation between the mode I failure of adhesive joints and laminated composites, *Eng. Fract. Mech.*, **24** n°3, pp 413-431, 1986.
- [CL02] N. Chandra, H. Li, C. Shet, H. Ghonem, Some issues in the application of cohesive zone models for metal-ceramic interfaces, *Int. J. Solids Struct.*, **39**, pp 2827-2855, 2002.
- [B59] G.I. Barenblatt, The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks, *J. Appl. Math. Mech.*, **23** n°3, pp 622-636, 1959.
- [B71] D. B. Bogy, Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions, *J. Appl. Mech.*, **38**, pp 377-386, 1971.
- [dB03] R. de Borst, Numerical aspects of cohesive-zone models, *Eng. Fract. Mech.*, **70**, pp 1743-1757, 2003.
- [D60] D. S. Dugdale, Yielding of steel sheets containing slits, *J. Mech. Phys. Solids*, **8**, pp 100-104, 1960.
- [DS97] M. L. Dunn, W. Suwito, Fracture initiation at sharp notches : correlation using critical stress intensities, *Int. J. Solids Struct.*, **34** n°29, pp 3873-3883, 1997.
- [DR91] D. Durban, O. Rand, Singular fields in plane-strain penetration, *Transactions of the ASME*, **58**, pp 910-915, 1991.
-

- 
- [FM98] G. A. Francfort, J.-J. Marigo, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, *J. Mech. Phys. Solids*, **46** n°8, pp 1319-1342, 1998.
- [GE03] F.J. Gómez, M. Elices, Fracture of components with V-shaped notches, *Eng. Fract. Mech.*, **70**, pp 1913-1927, 2003.
- [GE06] F.J. Gómez, M. Elices, Fracture loads for ceramic samples with rounded notches, *Eng. Fract. Mech.*, **73**, pp 880-894, 2006.
- [G20] A. A. Griffith, The phenomena of rupture and flow in solids, *Philos. trans. R. Soc. Lond., A*, **221**, pp 163-198, 1920.
- [HL07a] C. Henninger, D. Leguillon, E. Martin, Crack initiation at a V-notch - Comparison between a brittle fracture criterion and the Dugdale cohesive zone model, *C. R. Mécanique*, **335**, pp 388-393, 2007.
- [HL07b] C. Henninger, D. Leguillon, Adhesive fracture of an epoxy joint under thermal and mechanical loadings, à paraître dans le *Journal of Thermal Stresses*, 2007.
- [H68] J.W. Hutchinson, Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, **16**, pp 13-31, 1968.
- [HK07] C. Hwu, T. L. Kuo, A unified definition for stress intensity factors of interface corners and cracks, *Int. J. Solids Struct.*, **44**, pp 6340-6359, 2007.
- [IK97] T. Inoue, H. Koguchi, Relaxation of thermal stresses in dissimilar materials (approach based on stress intensity), *Int. J. Solids Struct.*, **34** n°25, pp 3215-3233, 1997.
- [I57] G. R. Irwin, Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate, *J. Appl. Mech.*, **24**, pp 361-366, 1957.
- [KN98] K. Kitamura, K. Nagata, M. Shibui, N. Tachikawa, M. Araki, Effects of interface edge configuration on residual stress in the bonded structures for a divertor application, *J. Nucl. Mater.*, **258-263**, pp 275-280, 1998.
- [LD99] P. E. W. Labossiere and M. L. Dunn, Stress intensities at interface corners in anisotropic bimaterials, *Engng. Fract. Mech.*, **62**, pp 555-575, 1999.
- [L03] J.-B. Leblond, Mécanique de la rupture fragile et ductile, Etudes en mécanique des matériaux et des structures, Lavoisier, 2003.
- [LM00a] J.-B. Leblond, P. Mouro, Crack propagation from a pre-existing flaw at a notch root. I. Introduction and general form of the stress intensity factors at the initial crack tip, *Int. J. Fract.*, **104**, pp 211-224, 2000.
- [LM00b] J.-B. Leblond, P. Mouro, Crack propagation from a pre-existing flaw at a notch root. II. Detailed form of the stress intensity factors at the initial crack tip and conclusion, *Int. J. Fract.*, **104**, pp 225-239, 2000.
-

- [L93] D. Leguillon, *Une singularité logarithmique pour un problème non-homogène : la singularité épine*, Habilitation à diriger des recherches, Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie, 1993.
- [L02] D. Leguillon, Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch, *European Journal of Mechanics A/Solids*, **21**, pp 61-72, 2002.
- [LSP87] D. Leguillon, E. Sanchez-Palencia, *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*, J. Wiley, New-york and Masson, Paris, 1987.
- [LSH99] D. Leguillon, J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia, Model problem of singular perturbation without limit in the space of finite energy and its computation, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, **327** Issue 5, pp 485-492, 1999.
- [LL01] D. Leguillon, C. Lacroix and E. Martin, Crack deflection by an interface - asymptotics of the residual thermal stresses, *Int. J. Solids Structures*, **38**, pp 7423-7445, 2001.
- [LY03a] D. Leguillon, Z. Yosibash, Crack onset at a V-notch. Influence of the notch tip radius, *Int. J. Fracture*, **122**, pp 1-21, 2003.
- [LY03b] D. Leguillon, Z. Yosibash, Failure at corners in brittle materials- Validation of a criterion *9th International Conference on the Mechanical Behavior of Materials, ICM9, conference CD-ROM*, 25-29 mai 2003, Genève (Suisse).
- [LR07] D. Leguillon, N. Recho, J. Li, Crack initiation at a V-notch in PMMA specimens under complex loadings, soumis au *European Journal of Mechanics*, 2007.
- [LC06] J. Liu, M. K. Chaudhury, D. H. Berry, J. E. Seebergh, J. H. Osborne, K. Y. Blohowiak, Effect of surface morphology on crack growth at a sol-gel reinforced epoxy/aluminum interface, *J. Adhes.*, **82**, pp 487-516, 2003.
- [MN07] L. Marsavina, A. D. Nurse, The asymptotic structure of small-scale yielding interfacial free-edge joint and crack-tip fields, *Acta. Mech.*, **190**, pp 115-131, 2007.
- [ML04] E. Martin, D. Leguillon, Energetic conditions for interfacial failure in the vicinity of a matrix crack in brittle matrix composites, *Int. J. Solids Struc.*, **41**, pp 6937-6948, 2004.
- [M99] L. Moncel, Mémoire de thèse : Etude des mécanismes d'endommagement d'un assemblage cuivre-composite carbone-carbone sous chargement thermo-mécanique, Université Bordeaux I, 1999.
- [MC58] F. A. McClintock, Ductile fracture instability in shear, *J. Appl. Mech.*, **25**, pp 582-588, 1958.
-

- 
- [MFY93] D. Munz, T. Fett and Y. Y. Yang, The regular stress term in bonded dissimilar materials after a change in temperature, *Eng. Fract. Mech.*, **44** n°2, pp 185-194, 1993.
- [N97] J. A. Nairn, Fracture mechanics of composites with residual thermal stresses, *J. Appl. Mech.*, **64**, pp 804-810, 1997.
- [N90] A. Needleman, An analysis of tensile decohesion along an interface, *J. Mech. Phys. Solids*, **38** n°3, pp 289-324, 1990.
- [N69] V. Novozhilov, On a necessary and sufficient criterion for brittle strength, *J. Appl. Math. Mech.*, **33**, pp 212-222, 1969.
- [P74] D. M. Parks, A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors, *Int. J. Fract.*, **10** n°4, pp 487-502, 1974.
- [PG78] A. Parvizi, K. W. Garrett, J. E. Bailey, Constrained cracking in glass fibre-reinforced epoxy cross-ply laminates, *J. Mater. Sci.*, **13**, pp 195-201, 1978.
- [P98] G. Pluvinage, Fatigue and fracture emanating from notch; the use of the notch intensity factor, *Nucl. Engng. Design*, **185**, pp 173-184, 1998.
- [PM07] B. Poitou, E. Martin, N. Carrère, D. Leguillon, J.-M. Gatt, Amorçage de fissure au voisinage des interfaces fibre/matrice : comparaison du critère mixte et des modèles de zone cohésive, à paraître dans les Actes du 18<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 27-31 août 2007.
- [QA98a] Z. Qian, A. R. Akisanya, An experimental investigation of failure initiation in bonded joints, *Acta Mater.*, **46** n°14, pp 4895-4904, 1998.
- [QA98b] Z. Qian, A. R. Akisanya, Analysis of free-edge stress and displacements fields in scarf joints subjected to a uniform change in temperature, *Fat. Fract. Eng. Mater. Struc.*, **21**, pp 687-703, 1998.
- [QA99] Z. Qian, A. R. Akisanya, An investigation of the stress singularity near the free edge of scarf joints, *Eur. J. Mech. A/Solids*, **18**, pp 443-463, 1999.
- [RO43] W. Ramberg, W. R. Osgood, Description of stress-strain curves by three parameters, *NACA Technical Note No. 902*, 1943.
- [R01] A. G. Ramm, A simple proof of the Fredholm alternative and a characterization of the Fredholm operators, *American Mathematical Monthly*, pp 855-860, 2001.
- [R90] E. D. Reedy Jr, Intensity of the stress singularity at the interface corner between a bonded elastic and rigid layer, *Eng. Fract. Mech.*, **36** n°4, pp 575-583, 1990.
-

- 
- [RG93] E. D. Reedy Jr, T. R. Guess, Butt joint strength : effect of residual stress and stress relaxation, *Int. J. Solids Struc.*, **30** n°21, pp 2929-2936, 1993.
- [RG96] E. D. Reedy Jr, T. R. Guess, Comparison of butt tensile strength data with interface corner stress intensity factor prediction, *J. Adhes. Sci. Technol.*, **10** n°1, pp 33-45, 1996.
- [R68] J. R. Rice, A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *J. Appl. Mech.*, **35**, pp 379-386, 1968.
- [RR68] J. R. Rice, G. F. Rosengren, Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, **16**, pp 1-12, 1968.
- [RK77] E. F. Rybicki, M. F. Kanninen, A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral, *Eng. Fract. Mech.*, **9**, pp 931-938, 1977.
- [S94] A. Seweryn, Brittle fracture criterion for structures with sharp notches, *Eng. Fract. Mech.*, **47** n°5, pp 673-681, 1994.
- [SA91] S. M. Sharma, N. Aravas, Determination of higher-order terms in asymptotic elastoplastic crack tip solutions, *J. Mech. Phys. Solids*, **39** n°8, pp 1043-1072, 1991.
- [SA93] S. M. Sharma, N. Aravas, On the development of variable-separable asymptotic elastoplastic solutions for interfacial cracks, *Int. J. Solids Struct.*, **30** n°5, pp 695-723, 1993.
- [SL06] K. C. Shin, J. J. Lee, Effects of thermal residual stresses on failure of co-cured lap joints with steel and carbon fiber-epoxy composite adherends under static and fatigue tensile loads, *Compos. Part A*, **37**, pp 476-487, 2006.
- [SJ06] C. T. Sun, Z.-H. Jin, Modeling of composite fracture using cohesive zone and bridging models, *Compos. Sci. Technol.*, **66** n°10, pp 1297-1302, 2006.
- [TP99] A. Towse, K.D. Potter, M.R. Wisnom, R.D. Adams, The sensitivity of a Weibull failure criterion to singularity strength and local geometry variations, *Int. J. Adhesion Adhesives*, **19**, pp 71-82, 1999.
- [T03] V. Tvergaard, Cohesive zone representations of failure between elastic or rigid solids and ductile solids, *Eng. Fract. Mech.*, **70**, pp 1859-1868, 2003.
- [WW06] J.-A. J. Wang, I. G. Wright, M. J. Lance, K. C. Liu, A new approach for evaluating thin film interface fracture toughness, *Mater. Sci. Eng.*, **A 426**, pp 332-345, 2006.
- [W51] W. Weibull, A statistical distribution function of wide applicability, *J. Appl. Mech.*, **58**, pp 293-287, 1951.
-

- [W52] M. L. Williams, Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, *J. Appl. Mech.*, **19**, pp 526-528, 1952.
- [Y98] Z. Yosibash, Thermal generalized stress intensity factors in 2-D domains, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **157**, pp 365-385, 1998.
- [YBG04] Z. Yosibash, A. Bussiba, I. Gilad, Failure criteria for brittle elastic materials, *Int. J. Fract.*, **125**, pp 307-333, 2004.
- [YP06] Z. Yosibash, E. Priel, D. Leguillon, A failure criterion for brittle elastic materials under mixed-mode loading, *Int. J. Fract.*, **141**, pp 291-312, 2006.
- [ZWL06] L. G. Zhao, N. A. Warrior, A. C. Long, A micromechanical study of residual stress and its effect on transverse failure in polymer-matrix composites, *Int. J. Solids Struc.*, **43**, pp 5449-5467, 2006.
-

---

# Annexes

---





---

# Annexe A

## Données matériaux

On donne dans le tableau A.1 les propriétés d'élasticité et de rupture des matériaux utilisés dans le mémoire.

Chapitres	partie I	partie II chapitre 2		partie II chapitre 3	
Matériau	PMMA	Cu	CFC	alliage aluminium	époxyde F922
E (MPa)	3 250	132 000	22 000	70 000	3 800
$\nu$	0.3	0.3	0.2	0.35	0.38
$\alpha$ ( $10^{-6}$ K $^{-1}$ )		16.7	1.3	58	21
$\mathcal{G}_c$ (J.m $^{-2}$ )	350		100		46
$\sigma_c$ (MPa)	75		50		45

TAB. A.1 – Caractéristiques matériaux utilisées dans la modélisation.

Les tableaux A.2, A.3 et A.4 concernent le chapitre 2 de la partie II. Les données utilisées sont extraites de la thèse de Moncel [M99].

		Température (°C)			
		20	500	1000	1500
MODULES (MPa)	traction X et Y	22000	22000	22000	22000
	compression X et Y	22000	22000	22000	22000
	traction Z	12000	12000	12000	12000
	compression Z	12000	12000	12000	12000
	cisaillement XY	5000	5000	5000	5000
	cisaillements XZ et YZ	4000	4000	4000	4000
COEFFICIENTS DE POISSON	en XY	0.1	0.1	0.1	0.1
	en XZ	0.2	0.2	0.2	0.2
	en YZ	0.2	0.2	0.2	0.2
COEFFICIENTS DE DILATATION ( $10^{-6}$ / °C)	en X et Y	1.3	1.6	1.8	2.0
	en Z	2.12	2.6	2.8	3.3

TAB. A.2 – Caractéristiques du CFC.

	Température (°C)			
	20	500	1000	1500
traction X et Y	50	50	60	70
compression X et Y	100	100	120	140
traction Z	20	24	28	32
compression Z	80	80	95	110
cisaillement XY	20	20	24	28
cisaillements XZ et YZ	18	20	23	25

TAB. A.3 – Limites à rupture (en MPa) du CFC.

T (°C)	20	200	400	500	600	800
E (GPa)	132 000	120 000	103 000		90 000	
$\nu$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
H (MPa)	1 190.5	1 041.7	875	729.2	500	312.5
$\alpha(10^{-6}/^{\circ}C)$	16.7	17.3	18.1	18.45	18.7	19.1
$\sigma_Y$ (MPa) - Cuivre OFHC	60	40	20	15	10	2
$\sigma_Y$ (MPa) - Cu-Cr-Zr	210	200	140	100	10	2

TAB. A.4 – Caractéristiques des deux alliages de cuivre utilisés (seule la limite élastique diffère)

---

## Annexe B

# Calcul de la variation d'énergie potentielle

On calcule la variation  $\delta P$  de l'énergie potentielle  $P$  entre l'état initial de la structure (cf. Fig. B.1 (a)) et son état fissuré (cf. Fig. B.1 (b)) sous le chargement appliqué sur  $\Gamma_u$ .

### B.1 Calcul en déplacement imposé

Le champ de déplacements  $\underline{U}^{(0)}$  sur la structure non fissurée  $\Omega_0$  vérifie les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^{(0)}) = C : \nabla_s \underline{U}^{(0)} \text{ dans } \Omega_0 \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^{(0)}) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_0 \\ \underline{U}^{(0)} = \underline{U}_0 \text{ sur } \Gamma_u \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^{(0)}) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Sigma^+ \cup \Sigma^- \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

tandis que  $\underline{U}^\ell$  vérifie les équations suivantes sur  $\Omega_\ell$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^\ell) = C : \nabla_s \underline{U}^\ell \text{ dans } \Omega_\ell \\ \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^\ell) = \underline{0} \text{ dans } \Omega_\ell \\ \underline{U}^\ell = \underline{U}_0 \text{ sur } \Gamma_u \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^\ell) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Sigma^+ \cup \Sigma^- \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{U}^\ell) \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^- \end{array} \right. \quad (\text{B.2})$$

---

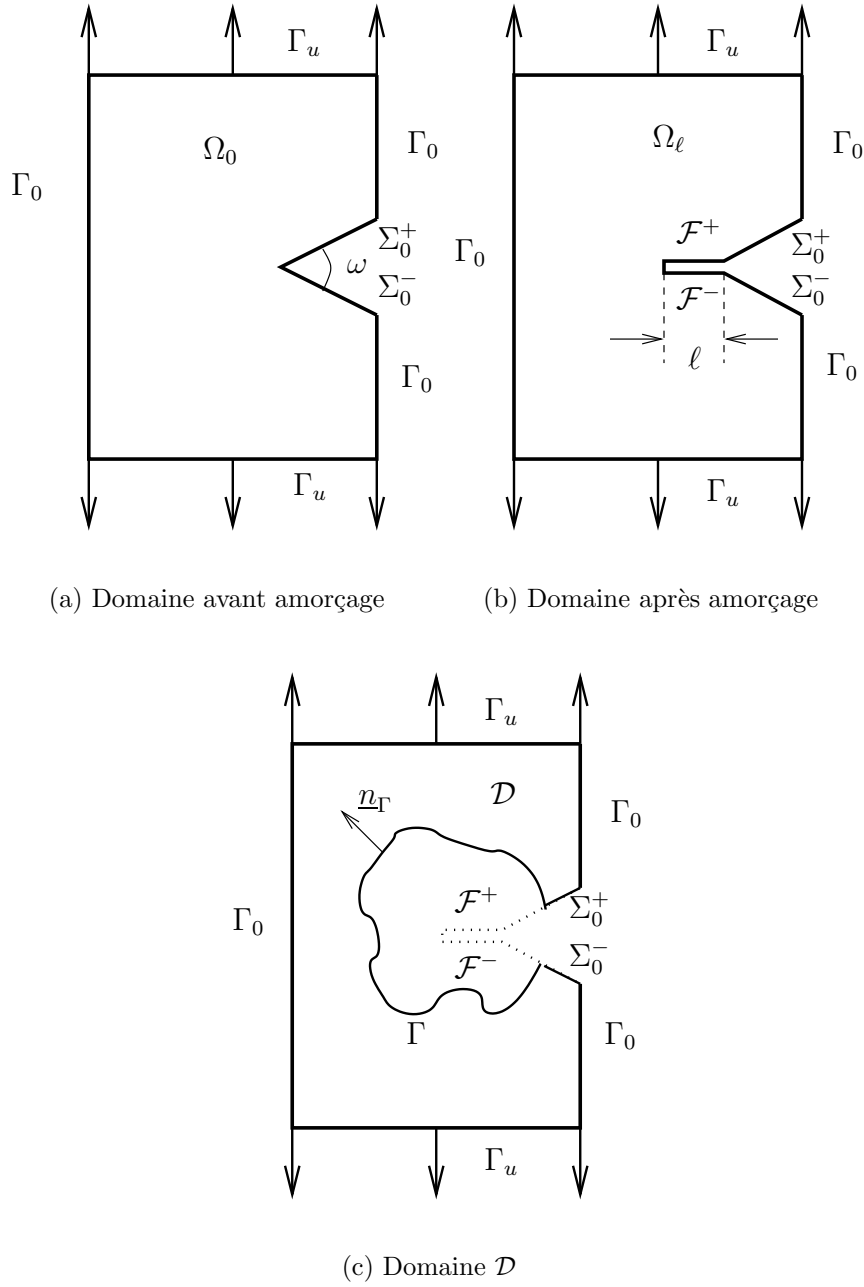


FIG. B.1 – Les domaines intervenant dans le calcul de  $\delta P$ .

L'expression générale de l'énergie potentielle en élasticité bidimensionnelle est la suivante :

$$P = b \frac{1}{2} \int_{\Omega} C : \nabla_s \underline{U}(x_1, x_2) : \nabla_s \underline{U}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{B.3})$$

où  $b$  désigne l'épaisseur de l'éprouvette.

Dans la suite, on utilisera la notation  $dx = dx_1 dx_2$  pour désigner l'élément de surface et  $ds$  l'élément de longueur.

L'énergie potentielle par unité d'épaisseur de la structure saine s'écrit :

$$\frac{P^0}{b} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} C : \nabla_s \underline{U}^{(0)} : \nabla_s \underline{U}^{(0)} dx \quad (\text{B.4})$$

et celle de la structure fissurée :

$$\frac{P^\ell}{b} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\ell} C : \nabla_s \underline{U}^\ell : \nabla_s \underline{U}^\ell dx \quad (\text{B.5})$$

On cherche à calculer  $\delta P$  sur une structure unique, mais l'on voit que  $\Omega_0$  et  $\Omega_\ell$  diffèrent par la présence de la fissure. On cherche alors à exprimer les grandeurs sur un domaine s'affranchissant de cette différence.

L'utilisation du théorème de Green permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{P^\ell}{b} &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\ell} \nabla \cdot (C : \nabla_s \underline{U}^\ell) \cdot \underline{U}^\ell dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\ell} C : \nabla_s \underline{U}^\ell \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^\ell ds \\ &= 0 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\ell} C : \nabla_s \underline{U}^\ell \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^\ell ds \\ &\quad \text{car le champ } \underline{U}^\ell \text{ est en équilibre (cf. eqn. B.2}_2\text{)} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} C : \nabla_s \underline{U}^\ell \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^\ell ds \\ &\quad \text{car } \Gamma_0 \cup \Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^- \text{ sont} \\ &\quad \text{des bords libres (cf. eqns. (B.2}_3\text{) et (B.2}_4\text{))} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

De la même manière :

$$\frac{P^0}{b} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} C : \nabla_s \underline{U}^{(0)} \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^{(0)} ds \quad (\text{B.7})$$

Le déplacement imposé sur  $\Gamma_u$  étant identique sur les deux structures (charge-ment statique) :

$$\underline{U}_{|\Gamma_u}^\ell = \underline{U}_{|\Gamma_u}^{(0)} (= \underline{U}_0) \quad (\text{B.8})$$

on peut remplacer  $\underline{U}^\ell$  par  $\underline{U}^{(0)}$  dans (B.6) et  $\underline{U}^{(0)}$  par  $\underline{U}^\ell$  dans (B.7).

La variation d'énergie potentielle par unité d'épaisseur s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta P}{b} &= \frac{P^\ell - P^0}{b} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} \left( C : \nabla_s \underline{U}^\ell \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^{(0)} - C : \nabla_s \underline{U}^{(0)} \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^\ell \right) ds
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Soit  $\mathcal{D}$  le domaine de frontière  $\partial\mathcal{D} = \Gamma_u \cup \Gamma_0 \cup \Sigma_0^+ \cup \Sigma_0^- \cup \Gamma$  (cf. Fig. B.1 (c)).

L'équation (B.9) peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta P}{b} &= \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{D}} \left( C : \nabla_s \underline{U}^\ell \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^{(0)} - C : \nabla_s \underline{U}^{(0)} \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^\ell \right) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0 \cup \Sigma_0^+ \cup \Sigma_0^-} \left( C : \nabla_s \underline{U}^\ell \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^{(0)} - C : \nabla_s \underline{U}^{(0)} \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^\ell \right) ds \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left( C : \nabla_s \underline{U}^\ell \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^{(0)} - C : \nabla_s \underline{U}^{(0)} \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^\ell \right) ds \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \left( C : \nabla_s \underline{U}^\ell : \nabla_s \underline{U}^{(0)} - C : \nabla_s \underline{U}^{(0)} : \nabla_s \underline{U}^\ell \right) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \left( \nabla \cdot (C : \nabla_s \underline{U}^\ell) \cdot \underline{U}^{(0)} - \nabla \cdot (C : \nabla_s \underline{U}^{(0)}) \cdot \underline{U}^\ell \right) dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left( C : \nabla_s \underline{U}^\ell \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^{(0)} - C : \nabla_s \underline{U}^{(0)} \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^\ell \right) ds
\end{aligned} \tag{B.10}$$

avec le théorème de Green et car  $\Gamma_0$  et  $\Sigma_0^+ \cup \Sigma_0^-$  sont libres de contraintes

Le premier terme du membre de droite de l'égalité (B.10) s'annule car  $C$  est un tenseur symétrique. Le deuxième terme s'annule également, car  $\underline{U}^\ell$  et  $\underline{U}^{(0)}$  sont en équilibre dans  $\mathcal{D}$ .

Donc finalement , on a ([LD99]) :

$$\delta P = b \mathcal{H}_\Gamma(\underline{U}^{(0)}, \underline{U}^\ell) \tag{B.11}$$

avec

$$\mathcal{H}_\Gamma(\underline{U}^{(0)}, \underline{U}^\ell) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left( C : \nabla_s \underline{U}^{(0)} \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^\ell - C : \nabla_s \underline{U}^\ell \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^{(0)} \right) ds \tag{B.12}$$

*Remarque* : L'intégrale  $\mathcal{H}$  est parfois dénotée  $\Psi$  [LSP87].

L'indépendance par rapport au contour se déduit du fait qu'aucune condition n'a été imposée au contour  $\Gamma$ .

## B.2 Calcul en effort imposé

Ici on considère que le bord  $\Gamma_u$  (cf. Fig. B.1) est chargé en effort. Les équations (B.13) et (B.23) deviennent :

$$\begin{aligned} C : \nabla_s \underline{U}^{(0)} \cdot \underline{n} &= \underline{h} \\ C : \nabla_s \underline{U}^\ell \cdot \underline{n} &= \underline{h} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

où  $\underline{n}$  désigne la normale extérieure au bord considéré.

L'énergie potentielle par unité d'épaisseur prend en compte les efforts imposés. Celle de la structure fissurée s'écrit par exemple :

$$\frac{P^\ell}{b} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\ell} C : \nabla_s \underline{U}^\ell : \nabla_s \underline{U}^\ell dx - \int_{\Gamma_u} \underline{h} \cdot \underline{U}^\ell ds \quad (\text{B.14})$$

L'utilisation du théorème de Green donne :

$$\frac{P^\ell}{b} = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} C : \nabla_s \underline{U}^\ell \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^\ell ds \quad (\text{B.15})$$

De la même manière, l'énergie potentielle par unité d'épaisseur de la structure saine s'écrit :

$$\frac{P^0}{b} = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} C : \nabla_s \underline{U}^{(0)} \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^{(0)} ds \quad (\text{B.16})$$

On constate que l'on obtient des énergies potentielles opposées à celles correspondant à un déplacement imposé (cf. eqns (B.6) et (B.7)).

Là encore, les conditions de chargement sur  $\Gamma_u$ , identiques dans les deux problèmes, nous permettent de permuter  $C : \nabla_s \underline{U}^\ell$  et  $C : \nabla_s \underline{U}^{(0)}$  dans les expressions (B.15) et (B.16).

La variation d'énergie potentielle par unité d'épaisseur s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{\delta P}{b} &= \frac{P^\ell - P^0}{b} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} \left( C : \nabla_s \underline{U}^{(0)} \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^\ell - C : \nabla_s \underline{U}^\ell \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^{(0)} \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} \left( C : \nabla_s \underline{U}^\ell \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^{(0)} - C : \nabla_s \underline{U}^{(0)} \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^\ell \right) ds \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

On voit que l'on obtient la même expression que pour un déplacement imposé (cf. eqn. (B.9)). La suite du calcul est donc identique, et l'expression finale de l'énergie

potentielle en effort imposé est également donnée par l'expression (B.11).

*Remarque* : L'expression (B.11) est donc également valable dans le cas de chargements mêlés (efforts et déplacements).

### B.3 Expression déduite des développements asymptotiques raccordés

On cherche à avoir une expression calculable à l'aide des champs asymptotiques.

L'expression (B.11) peut être réécrite :

$$2\delta P = \int_{\Gamma} C : \nabla_s \underline{U}^\ell \cdot \underline{n} \cdot (\underline{U}^\ell - \underline{U}^{(0)}) ds - \int_{\Gamma} C : \nabla_s (\underline{U}^\ell - \underline{U}^{(0)}) \cdot \underline{n} \cdot \underline{U}^\ell ds \quad (\text{B.18})$$

D'après les expressions (2.22) et (2.5), la différence entre  $\underline{U}^\ell$  et  $\underline{U}^{(0)}$  s'écrit :

$$\underline{U}^\ell - \underline{U}^{(0)} = K\ell^\lambda \hat{\underline{V}} + \dots \quad (\text{B.19})$$

On peut donc réécrire (B.20) :

$$\begin{aligned} 2\delta P &= \int_{\Gamma} \left( K\ell^\lambda C : \nabla_s (\rho^\lambda \underline{u}(\varphi)) + K\ell^\lambda C : \nabla_s \hat{\underline{V}} \right) \cdot \underline{n} \cdot K\ell^\lambda \hat{\underline{V}} ds \\ &\quad - \int_{\Gamma} K\ell^\lambda C : \nabla_s \hat{\underline{V}} \cdot \underline{n} \cdot \left( \underline{U}^{(0)}(\mathcal{O}) + K\ell^\lambda (\rho^\lambda \underline{u}(\varphi) + \hat{\underline{V}}) \right) ds \\ &= (K\ell^\lambda)^2 \int_{\Gamma} \left( C : \nabla_s (\rho^\lambda \underline{u}(\varphi)) \cdot \underline{n} \cdot \hat{\underline{V}} ds + (K\ell^\lambda)^2 \int_{\Gamma} C : \nabla_s \hat{\underline{V}} \cdot \underline{n} \cdot \hat{\underline{V}} ds \right. \\ &\quad \left. - K\ell^\lambda \underline{U}^{(0)}(\mathcal{O}) \cdot \int_{\Gamma} C : \nabla_s \hat{\underline{V}} \cdot \underline{n} ds \right. \\ &\quad \left. - (K\ell^\lambda)^2 \int_{\Gamma} C : \nabla_s \hat{\underline{V}} \cdot \underline{n} \cdot \rho^\lambda \underline{u}(\varphi) ds - (K\ell^\lambda)^2 \int_{\Gamma} C : \nabla_s \hat{\underline{V}} \cdot \underline{n} \cdot \hat{\underline{V}} ds \right) \\ &= (K\ell^\lambda)^2 \int_{\Gamma} \left( C : \nabla_s (\rho^\lambda \underline{u}(\varphi)) \cdot \underline{n} \cdot \hat{\underline{V}} - C : \nabla_s \hat{\underline{V}} \cdot \underline{n} \cdot \rho^\lambda \underline{u}(\varphi) \right) ds \\ &\quad - K\ell^\lambda \underline{U}^{(0)}(\mathcal{O}) \cdot \int_{\Gamma} C : \nabla_s \hat{\underline{V}} \cdot \underline{n} ds \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Le terme  $\int_{\Gamma} C : \nabla_s \hat{\underline{V}} \cdot \underline{n} ds$  est égal à  $\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot (C : \nabla_s \hat{\underline{V}}) dx$  par le théorème de Green, terme qui est nul car  $\hat{\underline{V}}$  est en équilibre.



Donc finalement, la variation d'énergie potentielle s'écrit :

$$\delta P = \mathcal{H}(\rho^\lambda \underline{u}(\varphi), \hat{\underline{V}}) \quad (\text{B.21})$$

*Remarque* : Compte-tenu du principe de superposition invoqué en (2.19), et en remarquant que

$$\mathcal{H}(\rho^\lambda \underline{u}(\varphi), \rho^\lambda \underline{u}(\varphi)) = 0 \quad (\text{B.22})$$

(cf. eqn. (B.12)), on peut également écrire :

$$\delta P = \mathcal{H}(\rho^\lambda \underline{u}(\varphi), \underline{V}^{(1)}) \quad (\text{B.23})$$